

S. BANACH, W. SIERPIŃSKI, W. STOŻEK

ARYTMETYKA

DLA I KLASY GIMNAZJALNEJ

CENA zł 2,10
WRAZ ZE ZNACZKIEM NA BUDOWĘ
PUBLICZNYCH SZKÓŁ POWSZECHNYCH



Biblioteka Główna
Uniwersytetu Gdańskiego



1100102367



K S I A Ż N I C A - A T L A S

S. A. ZJEDNOCZ. ZAKŁADY KARTOGR. I WYDAWN. T. N. S. W.

LWÓW — WARSZAWA

1933

Przy rozwiązywaniu zadań z liczbami statystycznymi wskazane jest posługiwanie się danymi statystycznymi z wydawnictwa: Wąsowicz i Zierhoffer
Świat w cyfrach

2338

Zakłady Graficzne Ski Akc. Książnica-Atlas we Lwowie.

Potęgowanie

Określenia

Przypuśćmy, że mamy dany iloczyn np.: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, w którym wszystkie czynniki są równe.

Iloczyn taki zapisujemy krócej w postaci: 2^4 . A więc czynnik, który się powtarza, piszemy raz, u góry zaś piszemy liczbę wskazującą, ile razy ten czynnik się powtarza.

Czytamy: dwa podniesione do potęgi czwartej, lub krótko: dwa do czwartej.

Podobnie: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ (czytaj: dwa do trzeciej),

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$ (czytaj: trzy do piątej),

$7 \cdot 7 = 7^2 = 49$ (czytaj: siedm do drugiej) i t. d.

Wyrażenie 2^4 nazywamy potęgą: liczbę 2 podstawą, 4 wykładnikiem potęgowym.

Wyrażenie takie, jak 7^1 , w którym wykładnik jest 1, równa się 7 (podstawie).

Podobnie: $2^1 = 2$, $5^1 = 5$, $10^1 = 10$ i t. d.

Zadania

1. Przedstaw, jako potęgi, następujące iloczyny:

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $5 \cdot 5 \cdot 5$, $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, $11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 11$.

b) $23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23 \cdot 23$, $18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18 \cdot 18$.

c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$, $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$.

d) $2,1 \cdot 2,1 \cdot 2,1$; $0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1$; $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2$.

2. Oblicz: a) 3^2 , 5^2 , 11^2 , 20^2 ; b) 3^4 , 5^3 , 2^6 , 7^4 ;

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{7}\right)^2$; d) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4$, $\left(\frac{2}{3}\right)^5$, $\left(\frac{2}{3}\right)^6$.

e) $0,1^2$; $1,1^2$; $0,01^2$; f) $0,1^4$; $2,1^3$; $0,01^3$; $0,001^2$.

3. Oblicz: a) 2^1 , 2^2 , 2^3 , ... 2^{16} ; b) 3^1 , 3^2 , 3^3 , ... 3^9 ;

c) 5^1 , 5^2 , 5^3 ... 5^6 ; d) $\left(\frac{2}{3}\right)^1$, $\left(\frac{2}{3}\right)^2$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$... $\left(\frac{2}{3}\right)^8$.

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^1$, $\left(\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(\frac{2}{5}\right)^3$, $\left(\frac{2}{5}\right)^4$, $\left(\frac{2}{5}\right)^5$; f) $0,2^2$; $0,2^3$; $0,2^4$; $0,2^5$.

4. Oblicz: a) $10^1, 10^2, 10^3 \dots 10^{10}$; b) $0,1^1; 0,1^2; 0,1^3; \dots 0,1^{10}$.
Przekonaj się, że 10 do jakiegokolwiek potęgi równa się jedynie z tyloma zerami, ile wynosi wykładnik.
5. Napisz tysiąc, sto tysięcy, milion, bilion, trylion jako potęgę liczby 10!
6. Liczba 12 000 równa się $12 \cdot 10^3$. Przedstaw w ten sposób liczby: 3 400 000, 1 600 000 000, 280 000 000 000, 23 400, 57 630 000.
7. Przekonaj się, że: a) $1 + 2 = 2^2 - 1$, $1 + 2 + 2^2 = 2^3 - 1$,
 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1$, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 2^5 - 1$,
 $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 2^8 - 1$;
 b) $1 + 3 = \frac{3^2 - 1}{3 - 1}$, $1 + 3 + 3^2 = \frac{3^3 - 1}{3 - 1}$, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = \frac{3^4 - 1}{3 - 1}$;
 c) $1 + 5 = \frac{5^2 - 1}{5 - 1}$, $1 + 5 + 5^2 = \frac{5^3 - 1}{5 - 1}$;
 d) $1 + 10 + 10^2 + 10^3 = \frac{10^4 - 1}{10 - 1}$;
 $1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4 + 10^5 = \frac{10^6 - 1}{10 - 1}$.
8. Przekonaj się, że: $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$, $11^3 + 12^3 + 13^3 + 14^3 = 20^3$.
9. W książce rachunkowej Achmesa (1700 przed Chr.) znajduje się takie zadanie: Było 7 osób, każda miała 7 kotów, każdy kot zjadł 7 myszy, każda mysz może zjeść 7 kłosów jęczmienia, każdy kłos jęczmienia po zasianiu daje 7 miar jęczmienia; ile miar zboża ocaliły te koty przez to, że zjadły myszy?
10. Ile wynosi bok kwadratu, którego pole równa się: a) 16 m^2 ,
 b) 25 dcm^2 , c) 81 cm^2 , d) 1 a , e) $1,44 \text{ a}^2$
11. Oblicz krawędź sześcianu, którego pole równa się: a) 150 cm^2 ,
 b) 384 dcm^2 , c) $2,16 \text{ a}!$
12. Jak długa jest krawędź sześcianu, którego objętość wynosi:
 a) 8 cm^3 , b) 27 cm^3 , c) 125 m^3 ?

Iloczyn potęg. (O równej podstawie)

Mamy obliczyć iloczyn potęg np.: $2^3 \cdot 2^5$, w których podstawy są równe.

Zamieniając potęgi na iloczyny, otrzymamy:

$$2^3 \cdot 2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_3 \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_5$$

W ostatnim iloczynie wszystkie czynniki są równe 2. Iloczyn ten możemy napisać więc w kształcie potęgi. Ponieważ czynnik 2

powtarza się w nim $3+5$ razy t. j. 8 razy, więc iloczyn ten równa się: $2^{3+5}=2^8$. Zatem: $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$.

Podobnie: $3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$, $10^3 \cdot 10^4 = 10^{3+4} = 10^7$,
 $5^1 \cdot 5^3 = 5^{1+3} = 5^4$ i t. d.

A zatem: Iloczyn potęg o równych podstawach równa się potędze, której podstawa jest ta sama, a wykładnik jest sumą danych wykładników.

Zadania

- Oblicz: a) $3^4 \cdot 3^2$, $2^7 \cdot 2^5$, $5^8 \cdot 5^2$, $4^3 \cdot 4^7$, $7^2 \cdot 7^4$;
 b) $2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^3$, $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^6$, $4 \cdot 4^2 \cdot 4^7$, $5^3 \cdot 5^7 \cdot 5^{11}$, $9^2 \cdot 9^4 \cdot 9^8$;
 c) $4^2 \cdot 4^5 \cdot 4^7 \cdot 4^8$, $8^3 \cdot 8^5 \cdot 8^{10} \cdot 8^{12}$, $10 \cdot 10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^8 \cdot 10^{11}$.
- Oblicz: a) $2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^4$, $2^5 \cdot 7^2 \cdot 2^3 \cdot 7^4$, $3^2 \cdot 4 \cdot 4^4 \cdot 3^5$, $5^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 5^4$;
 b) $2^3 \cdot 3^5 \cdot 3^3 \cdot 2^4$, $4^2 \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 4^3 \cdot 4^4$, $3^5 \cdot 6^2 \cdot 3^4 \cdot 6^3 \cdot 6^5$;
 c) $5 \cdot 2^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 2^4 \cdot 7^6$, $3^2 \cdot 5 \cdot 8^2 \cdot 3^4 \cdot 8^3 \cdot 5^4 \cdot 3^7$.
 Licz: $2^2 \cdot 3^4 \cdot 2^4 = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^4 = 2^6 \cdot 3^4$.
- Oblicz, zamieniając każdy czynnik na potęgę o podstawie:
 a) 10 iloczyny: $100 \cdot 1000$; $1000 \cdot 10\ 000$; $100\ 000$;
 b) 2 „ : 2.4; 4.8; 8.16; 4.8.16;
 c) 5 „ : 5.25; 25.125; 5.125.625.
- Oblicz: a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$; $\left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^6$; $\left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^4$;
 b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^6$; $\left(\frac{3}{11}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{11}\right)^2$.
- Oblicz: $2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^4$; $3 \cdot 1^4 \cdot 3 \cdot 1^5$; $0,1^4 \cdot 0,1^6$; $0,2^3 \cdot 0,2^4$;
 b) $1,4^2 \cdot 1,4^3 \cdot 1,4^5$; $0,5^2 \cdot 0,5^4 \cdot 0,5^3$; $2,1^3 \cdot 2,1^2 \cdot 2,1^4$;
 c) $1,02^2 \cdot 1,02^3 \cdot 1,02^4$; $0,01^3 \cdot 0,01^4 \cdot 0,01^2 \cdot 0,01^5$.

Liczby pierwsze

Określenia

Każda liczba całkowita jest podzielna przez 1 i przez siebie samą. Są liczby, które nie posiadają już innych dzielników. Taką liczbą jest np. 7.

Liczby takie, większe od 1, nazywamy pierwszymi lub prostymi.

Liczbami prostymi są: 2, 3, 5, 7, 11 i t. d.

Liczby całkowite (większe od jednośc), które prócz 1 i siebie samej posiadają jeszcze inne dzielniki, nazywamy złożonymi. Np. Liczba 8 posiada dzielniki 1, 2, 4, 8; zatem 8 jest liczbą złożoną.

Zadania

1. Wypisz liczby pierwsze, zawarte między 150 a 160!
2. Eratostenes, który żył w Aleksandji (3 wiek przed Chr.), podał następujący prosty sposób otrzymania tablicy liczb pierwszych: Wypisujemy liczby np. 1—20. Przekreślamy następnie co drugą liczbę wyjąwszy 2. Pierwszą po dwójce nieprzekreśloną liczbą jest 3. Wykreślamy teraz co trzecią liczbę wyjąwszy 3. Pierwszą nieprzekreśloną liczbą po trójce jest 5. Wykreślamy znowu co piątą liczbę, wyjąwszy 5 i t. d.
Liczby niewykreślone (z wyjątkiem 1) są liczbami pierwszymi, a to: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19. Ten sposób otrzymywania liczb pierwszych nazywa się sitem Eratostenesa. Wyszukaj zapomocą sita Eratostenesa liczby pierwsze, zawarte między 1—100.
3. Aby zbadać, czy dana liczba np. 101 jest, czy też nie jest liczbą pierwszą, obliczamy kwadraty kolejnych liczb pierwszych tak długo, aż otrzymamy liczbę większą od 101. Obliczamy zatem: $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $5^2 = 25$, $7^2 = 49$, $11^2 = 121$.
Aby się przekonać, czy dana liczba (101) jest liczbą pierwszą, wystarczy stwierdzić, że nie jest podzielna przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7, 11.
Ponieważ 101 nie jest podzielne przez żadną z liczb 2, 3, 5, 7, 11, więc jest liczbą pierwszą.
Zbadaj w ten sposób, które z liczb: 187, 283, 341, 411, 513, 781 są pierwsze, a które złożone.
4. Przedstaw a) 30, b) 40 jako sumę dwóch liczb pierwszych; na ile sposobów możesz to uczynić?
5. Matematyk Legendre podał wyrażenie $2 \cdot x^2 + 29$, które ma tę własność, że jeśli w niem w miejsce litery x podstawimy dowolną liczbę całkowitą zawartą między 0 a 28, to na wynik otrzymamy liczbę pierwszą. Np. położmy $x = 4$. Mamy: $2 \cdot 4^2 + 29 = 2 \cdot 16 + 29 = 32 + 29 = 61$ (liczba pierwsza). Napisz liczby pierwsze, które otrzymasz, kładąc w miejsce litery x : 8, 9, 10, 11, 12.
6. Matematyk Euler podał wyrażenie $x^2 + x + 41$, które dla liczb całkowitych od 0 do 39, podstawionych w miejsce litery x , daje na wynik liczbę pierwszą. Np. dla $x = 11$ mamy: $11^2 + 11 + 41 = 121 + 11 + 41 = 173$ (liczba pierwsza). Napisz liczby pierwsze, które otrzymasz, kładąc w miejsce litery x : 16, 17, 18, 19, 20.
7. Matematyk Escott podał wyrażenie $x^2 + 1601 - 79 \cdot x$, które dla liczb całkowitych od 0 do 79, podstawionych w miejsce

litery x , daje na wynik liczbę pierwszą. Np. dla $x = 10$ mamy: $10^2 + 1601 - 79 \cdot 10 = 911$ (liczba pierwsza). Napisz liczby pierwsze, które otrzymasz, kładąc w miejsce litery x : 60, 61, 62, 63, 64, 65.

Rozkład liczby na czynniki pierwsze

Często dogodnie jest przedstawić daną liczbę, jako iloczyn samych liczb pierwszych. Chcemy np. 360 przedstawić jako iloczyn samych liczb pierwszych. Szukamy w tym celu liczby pierwszej, któraby była dzielnikiem liczby 360. Liczbą taką jest 2. Mamy: $360 = 2 \cdot 180$. Szukamy teraz liczby pierwszej, która byłaby dzielnikiem 180. Liczbą taką jest znowu 2. Mamy: $180 = 2 \cdot 90$. Postępując tak dalej, otrzymujemy: $90 = 2 \cdot 45$; $45 = 3 \cdot 15$; $15 = 3 \cdot 5$. 5 jest już liczbą pierwszą. Zatem $360 = 2 \cdot 180 = 2 \cdot 2 \cdot 90 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 45 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

A więc: $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Możemy to również zapisać krócej w postaci: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Rachunek powyższy zapisujemy w następujący sposób:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Z jednej strony kreski zapisujemy liczby pierwsze a z drugiej ilorazy. Podobnie postępując, otrzymamy:

$$18900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \text{ czyli } 18900 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Zadania

- Liczba jest przez 4 podzielna, jeśli liczba utworzona z ostatnich dwóch cyfr jest przez 4 podzielna. Napisz kilka liczb: a) dwucyfrowych, b) sześciocyfrowych, c) siedmiocyfrowych, podzielnych przez 4.
- Liczba jest przez 3 podzielna, jeśli suma cyfr tej liczby jest przez 3 podzielna. Napisz kilka liczb: a) czterocyfrowych, b) pięciocyfrowych, c) sześciocyfrowych, podzielnych przez 3.
- Liczba jest przez 9 podzielna, jeśli suma cyfr tej liczby jest przez 9 podzielna. Napisz kilka liczb: a) trzycyfrowych, b) czterocyfrowych, c) pięciocyfrowych, podzielnych przez 9.

4. Napisz liczbę: a) dwucyfrową, b) trzycyfrową, c) czterocyfrową, d) pięciocyfrową podzielną przez 3, a niepodzielną przez 9.
5. Napisz kilka liczb trzycyfrowych podzielnych przez: a) 4 i 5, b) 2 i 3, c) 4 i 3, d) 2 i 9, e) 4 i 9, f) 3 i 5, g) 9 i 5.
6. Rozłóż następujące liczby na czynniki pierwsze: a) 240, 242, 270, 360, 798, 846; b) 273, 3168, 4320, 11 200, 28 600; c) 12 312, 15 680, 159 600, 78 408.
7. Rozłóż w pamięci następujące liczby na czynniki pierwsze: a) 6, 8, 12, 18, 24, 16, 27, 36; b) 150, 180, 210, 600, 1100, 1700.

Podzielniki liczby

Przypuśćmy, że chcemy znaleźć wszystkie podzielniki jakiejś liczby, np. 60. W tym celu rozkładamy ją na czynniki pierwsze. Mamy: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Każdy czynnik jest podzielnikiem 60. Iloczyn jakichkolwiek czynników jest również podzielnikiem liczby 60. A więc podzielnikami liczby 60 są: 2, 3, 5, $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 5 = 15$, $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Zatem podzielnikami liczby 60 są: 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 20, 30, 60. Są to wszystkie podzielniki liczby 60 z wyjątkiem 1.

Zadania

1. Podaj z pomiędzy liczb od 1 do 100 te, które posiadają podzielnik: a) 4, b) 9, c) 6, d) 8.
2. Podaj wszystkie podzielniki liczb: a) 6, b) 15, c) 18, d) 28, e) 48.
3. Każdy iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 24; przekonaj się o tem na kilku przykładach!
4. Jaka to jest najmniejsza liczba, która posiada 4 podzielniki?
5. Jeśli w wyrażeniu $(x - 1) \cdot (x + 1)$ podstawisz w miejsce litery x liczbę pierwszą większą od 3, to na wynik otrzymasz liczbę, która ma podzielnik 12; przekonaj się o tem przyjmując za x : 5, 7, 11, 13, 17, 19.
6. Jeśli w wyrażeniach $x^3 + 1$ i $x + 1$ podstawisz w miejsce litery x liczbę całkowitą, to otrzymasz dwie liczby, z których pierwsza jest przez drugą podzielna; przekonaj się o tem, przyjmując za x : 3, 4, 5, 6, 7, 8.
7. Podzielniki liczby 6 mniejsze od 6 są: 1, 2, 3. Suma ich $1 + 2 + 3$ równa się 6. Taka liczba nazywa się doskonałą. Przekonaj się, że: a) liczba 28 jest doskonałą, t. j. że suma wszystkich jej podzielników mniejszych od 28 równa się 28, b) liczba 496 jest doskonałą!

Wspólny dzielnik

Dwie jakiegokolwiek liczby mają zawsze wspólny dzielnik 1.

Dwie liczby, które nie mają innego wspólnego dzielnika oprócz 1, nazywają się względem siebie pierwsze lub względnie pierwsze.

Np. Liczby 8, 9 są względnie pierwsze.

Wyznamy wspólne dzielniki liczb 30 i 36.

Podzielnikami liczby 30 są: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.

„ „ 36 „ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36.

Widzimy stąd, że wspólnymi dzielnikami liczb 30 i 36 są liczby: 1, 2, 3, 6.

Największym wspólnym dzielnikiem jest 6. Największy wspólny dzielnik oznaczamy: $NWP(30, 36) = 6$.

Wyznaczanie NWP zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze

Mamy znaleźć NWP (216, 1620).

Rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze:

$$216 = 2^3 \cdot 3^3, 1620 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5.$$

Liczby pierwsze 2 i 3, występujące równocześnie w obu rozkładach, są wspólnymi dzielnikami danych liczb. Każdy inny wspólny dzielnik jest iloczynem dwójek i trójek. W tym iloczynie 2 może występować co najwyżej 2 razy, gdyż inaczej 1620 nie byłoby podzielne przez ten iloczyn; 3 zaś jako czynnik może występować co najwyżej 3 razy, gdyż inaczej 216 nie byłoby przez ten iloczyn podzielne. Wynika stąd, że:

$$NWP(216, 1620) = 2^2 \cdot 3^3 = 108.$$

Podobnie, chcąc znaleźć NWP (3960, 3740, 260), rozkładamy te liczby na czynniki pierwsze.

$$\text{Otrzymamy: } 3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$$

$$3740 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17$$

$$260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13.$$

$$\text{Zatem } NWP(3960, 3740, 260) = 2^2 \cdot 5 = 20.$$

Zadania

1. Wyszukaj NWP liczb: a) 18 i 12; b) 30 i 12; c) 16 i 24; d) 32 i 48; e) 55 i 99; f) 75 i 175; g) 42 i 63; h) 65 i 143; i) 15, 25 i 35; j) 24, 36, 48 i 60; k) 224 i 392; l) 828 i 10 692; m) 9216, 6912 i 12 672; n) 2178, 5324 i 6468; o) 1848, 2904 i 3432; p) 7128, 4320 i 1008.

2. Uprość następujące ułamki przez NWP licznika i mianownika:
 $\frac{180}{252}$; $\frac{330}{462}$; $\frac{560}{420}$; $\frac{1080}{810}$; $\frac{1512}{1008}$; $\frac{2145}{1386}$; $\frac{700}{5880}$; $\frac{126}{2940}$.
3. Mamy odmierzyć 80 l, 76 l i 68 l wina.
 Jaką największą pojemność ma naczynie, którym odmierzysz te ilości wina, bez użycia innych naczyń?
4. Wyszukaj największą liczbę, przez którą podzielone 85 daje na resztę 1, 110 zaś na resztę 2!
5. Proch strzelniczy można utworzyć z 150 części saletry, 25 części siarki i 25 części węgla; w jaki sposób ten przepis zapiszesz, biorąc 1 kg węgla?
6. Dane są trzy kwadraty, o bokach 108 cm, 132 cm, 204 cm; podziel je na równe kwadraty, możliwie wielkie!
7. Prostokąt ma wymiary 12 cm i 18 cm; podziel go na możliwie największe równe kwadraty!

Najmniejsza wspólna wielokrotność

Wypiszmy wielokrotności liczb: 6, 10, 15.

Wielokrotności liczby 6 są: 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...

liczby 10 są: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, ...

liczby 15 są: 15, 30, 45, 60, 75, ...

Widzimy stąd, że wspólnymi wielokrotnościami danych liczb są liczby 30, 60, i t. d.

Najmniejszą zaś wspólną wielokrotnością danych liczb jest 30. Najmniejszą wspólną wielokrotność oznaczamy:

$$NWW(6, 10, 15) = 30.$$

Mamy znaleźć NWW (12, 30, 50). Rozkładamy na czynniki pierwsze dane liczby. Otrzymamy:

$$12 = 2^2 \cdot 3; \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5; \quad 50 = 2 \cdot 5^2.$$

W rozkładach powyższych występują liczby pierwsze 2, 3, 5. Zatem NWW danych liczb jest iloczynem dwójek, trójek i piątek. W iloczynie tym 2 musi wystąpić 2 razy, gdyż inaczej 12 nie mieściłoby się w tym iloczynie; podobnie 5 musi wystąpić 2 razy, zaś 3 jeden raz. A więc:

$$NWW(12, 30, 50) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 = 300.$$

$$\text{Podobnie: } 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \quad 350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7, \quad 245 = 5 \cdot 7^2.$$

$$\text{A więc: } NWW(60, 350, 245) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 14700.$$

Zadania

1. Oblicz NWW liczb: a) 7 i 9; 7 i 35; 16 i 48; 17 i 68.
 b) 2, 4 i 8; 50, 60 i 300; 4, 44 i 22;

c) 5, 9 i 15; 6, 8 i 10; 8, 10 i 12;

d) 3, 9, 7, 21 i 49; 14, 20, 21 i 28; 3, 6, 13, 39 i 65.

(Zadanie a) rozwiąż dwoma sposobami: I) wyznaczając wielokrotności danych liczb, II) przez rozkład na czynniki pierwsze).

2. Można obliczyć NWW (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175), sporządzając tabelkę następującą:

6	10	15	35	40	162	175	2
		15		20	81	175	3
		3		20	27	175	5
				4	27	35	

$$\text{NWW (6, 10, 15, 35, 40, 162, 175)} = 4 \cdot 27 \cdot 35 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 113\,400.$$

W pierwszym wierszu, na lewo od kreski pionowej, przekreślamy każdą liczbę, która jest podzielnikiem drugiej, a więc np. 6, ponieważ jest podzielnikiem 162. Po prawej stronie kreski pionowej piszemy jakąkolwiek liczbę pierwszą, która jest podzielnikiem przynajmniej dwóch liczb nieprzekreślonych, w naszym przykładzie 2. W drugim wierszu przepisujemy te liczby, które nie są podzielne przez 2, a następnie ilorazy pozostałych liczb przez 2.

Z drugim wierszem postępujemy tak, jak z pierwszym i otrzymujemy wiersz trzeci.

Postępując w ten sposób dalej, dochodzimy do wiersza, w którym każde dwie liczby są względem siebie pierwsze.

Iloczyn liczb ostatniego wiersza i kolumny po prawej stronie kreski pionowej jest NWW danych liczb. Oblicz NWW liczb:

a) 3, 6, 2, 15 i 25; 4, 5, 7, 35 i 56;

b) 8, 9, 18, 24 i 36; 57, 55, 44 i 76;

c) 105, 108, 126 i 135; 21, 33, 80, 112 i 44.

3. Sprowadź następujące ułamki do wspólnego mianownika, obierając jako wspólny mianownik NWW mianowników, a następnie porównaj:

a) $\frac{3}{8}$ i $\frac{19}{120}$; $\frac{6}{7}$ i $\frac{11}{35}$; $\frac{3}{8}$ i $\frac{19}{20}$; $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{14}$;

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$; $\frac{8}{15}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{20}$; $\frac{19}{20}$, $\frac{39}{80}$ i $\frac{1}{12}$;

c) $\frac{1}{14}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{13}{24}$, $\frac{15}{42}$ i $\frac{1}{9}$; $\frac{13}{18}$, $\frac{49}{56}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{1}{21}$ i $\frac{7}{9}$.

4. Uprość, a następnie sprowadź do najmniejszego wspólnego mianownika następujące ułamki:

a) $\frac{9}{12}$ i $\frac{14}{40}$; $\frac{15}{27}$ i $\frac{14}{30}$; $\frac{12}{16}$ i $\frac{25}{30}$; $\frac{29}{36}$ i $\frac{38}{42}$;

b) $\frac{1}{30}$, $\frac{10}{36}$ i $\frac{15}{72}$; $\frac{10}{16}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{21}{105}$ i $\frac{1}{40}$;

c) $\frac{22}{48}$, $\frac{28}{42}$, $\frac{28}{56}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{24}{30}$ i $\frac{8}{70}$.

Działania liczbami ułamkowymi i dziesiętnymi

Ułamki i liczby dziesiętne

- Narysuj odcinek o długości 6 cm, a obok $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$ tego odcinka.
- Napisz następujące ułamki w formie ilorazu: $\frac{2}{7}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{21}{4}$, $\frac{64}{16}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{126}{11}$.
- Napisz następujące ilorazy w formie ułamka: $5:6$, $11:4$, $28:6$, $4:17$, $29:3$, $125:2$, $245:600$.
- Ile to jest cm: $\frac{2}{5}$ m, $\frac{3}{4}$ m, $\frac{19}{20}$ m, $\frac{13}{50}$ m?
- Ile to jest g: $\frac{3}{4}$ kg, $\frac{5}{8}$ kg, $\frac{9}{25}$ kg, $\frac{17}{50}$ kg?
- Wyraż w ułamkach m: 10 cm, 50 cm, 64 cm, 71 cm!
- Wyraż w ułamkach kg: 30 g, 125 g, 850 g, 4 g!
- Jaką liczbę należy wstawić w miejsce litery x w następujących równościach: a) $\frac{2}{3}$ m = x cm; $\frac{3}{8}$ km = x m; 75 cm = x m.
b) $\frac{3}{8}$ t = x kg, 624 kg = x t, 164 g = x kg;
c) $\frac{1}{4}$ m² = x dcm², $\frac{7}{8}$ m² = x cm², 27 cm² = x dcm²;
d) $\frac{3}{8}$ hl = x l; 5624 l = x hl; $\frac{4}{5}$ l = x dcl.
- Jak zmienia się wartość ułamka, jeżeli licznik: a) zwiększamy, b) zmniejszamy? Podaj przykłady liczbowe!
- Jak zmienia się wartość ułamka, jeśli mianownik: a) zwiększamy, b) zmniejszamy? Podaj przykłady liczbowe!
- Jak należy zmieniać licznik i mianownik ułamka, aby jego wartość nie zmieniła się? Podaj przykłady liczbowe!
- Uporządkuj wedle wielkości rosnących lub malejących:
a) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{8}{4}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{4}$; b) $\frac{1}{20}$, $\frac{4}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{5}{20}$, $\frac{11}{20}$;
c) $\frac{60}{115}$, $\frac{60}{12}$, $\frac{60}{3}$, $\frac{60}{45}$, $\frac{60}{15}$, $\frac{60}{13}$, $\frac{60}{55}$; d) $\frac{87}{37}$, $\frac{57}{57}$, $\frac{87}{27}$, $\frac{87}{15}$, $\frac{87}{100}$, $\frac{87}{15}$, $\frac{87}{47}$.
- Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
a) $\frac{1}{2} = \frac{x}{4}$, $\frac{1}{2} = \frac{x}{8}$, $\frac{1}{2} = \frac{x}{16}$, $\frac{1}{2} = \frac{x}{32}$;
b) $\frac{1}{2} = \frac{4}{x}$, $\frac{1}{2} = \frac{8}{x}$, $\frac{1}{2} = \frac{16}{x}$, $\frac{1}{2} = \frac{32}{x}$;
c) $\frac{2}{5} = \frac{x}{10}$, $\frac{2}{5} = \frac{x}{15}$, $\frac{2}{5} = \frac{x}{20}$, $\frac{2}{5} = \frac{x}{30}$;
d) $\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$, $\frac{2}{5} = \frac{8}{x}$, $\frac{2}{5} = \frac{14}{x}$, $\frac{2}{5} = \frac{18}{x}$.
- Napisz liczbę 5 w formie ułamka o mianowniku: 1, 2, 7, 12, 4!
- Napisz kilka ułamków właściwych, a kilka niewłaściwych!
- Zamień na liczbę mieszaną następujące ułamki niewłaściwe:
a) $\frac{57}{4}$, $\frac{83}{7}$, $\frac{46}{11}$, $\frac{123}{15}$, $\frac{125}{15}$; b) $\frac{146}{13}$, $\frac{169}{15}$, $\frac{390}{20}$, $\frac{350}{47}$, $\frac{400}{91}$.
- Zamień następujące liczby mieszane na ułamki niewłaściwe:
a) $1\frac{1}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $7\frac{5}{11}$, $10\frac{1}{12}$, $30\frac{1}{10}$; b) $21\frac{1}{15}$, $14\frac{6}{7}$, $25\frac{1}{10}$, $46\frac{1}{11}$.

18. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:

a) $5 = \frac{x}{4}$, $7 = \frac{x}{6}$, $14 = \frac{x}{11}$, $20 = \frac{x}{15}$;

b) $5 = \frac{20}{x}$, $8 = \frac{63}{x}$, $29 = \frac{81}{x}$, $2 = \frac{126}{x}$;

c) $4\frac{2}{7} = \frac{x}{7}$, $9\frac{4}{5} = \frac{x}{5}$, $11\frac{1}{3} = \frac{x}{3}$, $18\frac{9}{11} = \frac{x}{11}$;

d) $24\frac{1}{3} = \frac{x}{3}$, $35\frac{1}{5} = \frac{x}{5}$, $60\frac{7}{8} = \frac{x}{8}$, $114\frac{4}{13} = \frac{x}{13}$.

19. Ile to jest: a) $\frac{1}{2}$ z 4 zł, $\frac{3}{4}$ z 5 zł, $\frac{7}{10}$ z 8 zł, $\frac{2}{3}$ z 2 zł;

b) $\frac{1}{4}$ z 2 km, $\frac{5}{8}$ z 4 km, $\frac{1}{16}$ z 3 km, $\frac{2}{35}$ z 2 km;

c) $\frac{1}{2}$ z 3 tuz., $\frac{1}{6}$ z 5 tuz., $\frac{1}{4}$ z 7 tuz., $\frac{1}{3}$ z 4 tuz.

20. Napisz 2, 4, 5, 7 godzin jako ułamek: a) dnia, b) tygodnia!

21. Napisz 15 sekund jako ułamek: a) minuty, b) godziny, c) dnia!

22. Uprość następujące ułamki:

a) $\frac{4}{8}$, $\frac{10}{12}$, $\frac{25}{40}$, $\frac{75}{100}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{42}{105}$; b) $\frac{75}{80}$, $\frac{78}{90}$, $\frac{68}{142}$, $\frac{125}{135}$, $\frac{208}{304}$, $\frac{888}{915}$;

c) $\frac{108}{176}$, $\frac{388}{444}$, $\frac{444}{222}$, $\frac{222}{333}$, $\frac{252}{342}$, $\frac{235}{265}$;

d) $\frac{3.4}{4}$, $\frac{5}{3.10}$, $\frac{6}{2.18}$, $\frac{7}{14.6}$, $\frac{9}{3.5}$, $\frac{18}{6.7}$;

e) $\frac{12}{9.8}$, $\frac{16}{12.3}$, $\frac{24}{18.5}$, $\frac{30}{45.7}$, $\frac{63}{42.2}$, $\frac{24}{5.36}$.

23. Zamień ułamki: a) $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{5}{8}$, $1\frac{1}{2}$ na ułamki o mianowniku 24;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{11}{24}$, $\frac{31}{60}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{28}{30}$ na ułamki o mianowniku 60;

c) $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{17}{18}$, $\frac{31}{36}$ na ułamki o mianowniku 72.

24. Zamień ułamki: a) $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{12}{11}$ na ułamki o liczniku 24;

b) $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{11}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{24}{14}$, $\frac{30}{31}$, $\frac{15}{19}$, $\frac{20}{18}$ na ułamki o liczniku 60;

c) $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{24}{19}$, $\frac{18}{16}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{36}{29}$ na ułamki o liczniku 72.

25. Sprowadź następujące ułamki do najmniejszego wspólnego mianownika: a) $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{2}$ i $\frac{5}{3}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{6}$ i $\frac{3}{11}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{30}$;

b) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ i $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ i $\frac{1}{10}$;

c) $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{14}$ i $\frac{1}{112}$; $1\frac{1}{2}$, $\frac{19}{30}$ i $\frac{29}{18}$; $\frac{9}{35}$, $\frac{23}{21}$ i $\frac{17}{18}$;

d) $\frac{7}{8}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{12}{13}$ i $\frac{17}{18}$; $\frac{13}{24}$, $\frac{11}{36}$, $\frac{41}{48}$ i $\frac{89}{80}$; $\frac{13}{36}$, $\frac{19}{45}$, $\frac{23}{50}$ i $\frac{31}{45}$;

e) $\frac{23}{24}$, $\frac{31}{40}$, $\frac{53}{42}$ i $\frac{1}{90}$; $\frac{29}{50}$, $\frac{11}{70}$, $\frac{42}{45}$ i $\frac{23}{175}$; $\frac{17}{30}$, $\frac{12}{42}$, $\frac{31}{63}$ i $\frac{41}{105}$.

26. Napisz ułamki $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$ w formie liczb dziesiętnych!

27. Napisz ułamki $\frac{3}{10}$, $\frac{41}{100}$, $\frac{56}{1000}$, $\frac{123}{10000}$, $\frac{700}{100000}$, $\frac{246}{1000000}$, $\frac{7}{1000000}$, $\frac{161851}{10000000}$ w formie liczb dziesiętnych i przeczytaj je!

28. Pomnóż liczbę a) 2,54758, b) 4,000567, kolejno przez 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 i przeczytaj otrzymane wyniki!

29. Podziel liczbę a) 624,2, b) 0,35 kolejno przez 10, 10^2 , 10^3 , 10^4 , 10^5 i przeczytaj otrzymane wyniki!

30. Ile to jest: a) zł i gr: 2,34 zł, 5,02 zł, 0,45 zł, 0,04 zł;

b) m i cm: 5,06 m, 0,46 m, 1,02 m, 0,03 m;

c) km i m: 2,456 km, 1,53 km, 14,002 km, 0,045 km, 0,102 km, 0,003 km;

d) kg i g: 13,246 kg, 4,073 kg, 0,51 kg, 0,02 kg, 0,004 kg.

31. Zaokrąglaj następujące liczby:

a) 2,61, 1,07, 0,456, 13,71, 0,061 do dziesiątych;

b) 2,456, 0,041, 1,006, 0,458, 1,0014 do setnych;

c) 1,2468, 0,0069, 0,0145, 0,1412 do tysięcznych;

d) 281, 246,1, 68,09, 164,9, 93 do dziesiątek;

e) 681, 214, 183,01, 1645, 2141,2 do setek;

f) 1681, 2142, 1893, 6421, 5140,2 do tysięcy.

Np. liczbę 6,418 zaokrąglamy „do dziesiątych“, zastępując cyfry niższych jednostek niż dziesiąte zerami, cyfrę zaś dziesiątych t. j. 4 pozostawiamy bez zmiany, gdyż następna cyfra t. j. 1 jest mniejsza od 5. Otrzymamy zatem 6,4.

Chcąc zaokrąglić liczbę 2,358 do dziesiątych, powiększamy cyfrę dziesiątych t. j. 3 o 1, gdyż następna cyfra jest już 5. Otrzymamy: 2,4.

Dodawanie

Zadania

- Oblicz: a) $\frac{3}{5} + \frac{7}{25}$, $\frac{5}{9} + \frac{13}{36}$, $\frac{9}{10} + \frac{9}{40}$, $\frac{17}{8} + \frac{55}{144}$;
b) $\frac{17}{16} + \frac{11}{8}$, $\frac{11}{12} + \frac{13}{24}$, $\frac{3}{5} + \frac{5}{7} + \frac{13}{35}$, $4 + \frac{9}{16} + \frac{13}{8}$;
c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$, $\frac{4}{7} + \frac{1}{8}$, $\frac{3}{11} + \frac{4}{10}$, $\frac{13}{18} + \frac{2}{15}$, $\frac{52}{15} + \frac{1}{6}$;
d) $12\frac{5}{12} + 14\frac{2}{3}$, $\frac{7}{12} + 14\frac{3}{8}$, $21\frac{1}{3} + 18\frac{1}{4}$, $9\frac{13}{8} + 5\frac{7}{10}$;
e) $10\frac{4}{15} + 3\frac{5}{24}$, $12\frac{1}{11} + 3\frac{5}{8}$, $6\frac{11}{10} + 8\frac{7}{15}$, $12\frac{7}{12} + 3\frac{1}{18} + 3\frac{2}{3}$.
- Dodaj wszystkie ułamki, mniejsze od $\frac{1}{3}$, o wspólnym mianowniku 24!
- Dodaj wszystkie ułamki o wspólnym mianowniku 13 od $\frac{1}{13}$ do $\frac{12}{13}$ włącznie!
- Dodaj wszystkie ułamki o wspólnym mianowniku 20, których liczniki są liczbami pierwszymi, mniejszymi od 20!
- Oblicz: a) $3 + 2\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3} + 2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4} + \frac{5}{8}$, $\frac{4}{5} + 6\frac{1}{3}$;
b) $2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} + 1\frac{1}{6}$, $3\frac{1}{5} + 4\frac{7}{10} + \frac{1}{20}$, $4\frac{1}{12} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{5}{8} + 4\frac{1}{2}$.
- Oblicz najkrótszym sposobem:
a) $2\frac{1}{6} + 5\frac{5}{8} + 1$, $4\frac{2}{3} + 1\frac{1}{7} + 8\frac{2}{3} + 5\frac{5}{7}$;
b) $4\frac{2}{11} + 3 + 5\frac{6}{11} + 7\frac{1}{11}$, $1\frac{1}{3} + 16\frac{1}{3} + 8\frac{5}{3} + 10\frac{1}{3}$.
- Oblicz: a) $\frac{4}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, $\frac{7}{8} + \frac{9}{40} + \frac{11}{12} + \frac{3}{8}$;
b) $6\frac{4}{11} + 2\frac{1}{30} + 5\frac{2}{22}$, $4\frac{9}{28} + 15\frac{29}{28} + 4\frac{19}{7}$, $40\frac{1}{2} + 23\frac{3}{8} + 6\frac{19}{8}$;
c) $7\frac{1}{11} + 2\frac{1}{5} + 8\frac{5}{11} + 3\frac{3}{10}$, $28\frac{19}{21} + 3\frac{1}{2} + 7\frac{1}{6} + 25\frac{2}{3}$;
d) $8\frac{9}{15} + 4\frac{1}{14} + 6\frac{1}{21} + 12\frac{29}{30}$, $16\frac{5}{14} + 7\frac{5}{21} + 14\frac{1}{28} + 3\frac{5}{112}$.
- Oblicz: a) $7\frac{1}{3} + 4\frac{9}{10} + \frac{13}{30} + 7\frac{5}{6} + 8\frac{1}{5}$, $6\frac{5}{8} + 4\frac{2}{5} + 5\frac{7}{10} + 1\frac{1}{10} + 5\frac{11}{10}$;
b) $6\frac{1}{3} + 2\frac{3}{8} + 11\frac{5}{12} + 7\frac{3}{2} + \frac{1}{8}$, $7\frac{3}{8} + 8\frac{1}{5} + 10\frac{5}{16} + 2\frac{1}{8} + 3\frac{1}{10}$;

- c) $8\frac{9}{14} + 2\frac{5}{16} + 3\frac{1}{4} + 1\frac{55}{112} + \frac{1}{8}$; $10\frac{11}{12} + 4\frac{1}{8} + 8\frac{3}{16} + 2\frac{1}{36} + 1\frac{29}{144}$;
 d) $\frac{9}{14} + \frac{5}{9} + \frac{7}{18} + \frac{23}{24} + \frac{37}{42} + \frac{31}{56} + \frac{47}{84}$; $\frac{11}{36} + \frac{17}{18} + \frac{1}{6} + \frac{5}{8} + \frac{19}{24} + \frac{11}{12} + \frac{71}{72}$;
 e) $16\frac{10}{21} + 8\frac{18}{15} + 15\frac{11}{14} + 10\frac{33}{33} + 1\frac{7}{6} + 4\frac{55}{6} + 12\frac{17}{14}$;
 f) $18\frac{7}{24} + 12\frac{7}{24} + 7\frac{3}{8} + 14\frac{7}{12} + 9\frac{11}{20} + 11\frac{7}{15} + 15\frac{35}{35}$.
9. Oblicz: $\frac{3}{10} + \frac{5}{10} + \frac{7}{10} + \frac{2}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{100}$; $1\frac{1}{10} + \frac{7}{10} + \frac{4}{100} + \frac{23}{100}$.
 Powtórz rachunek, pisząc ułamki jako liczby dziesiętne!
10. Dodawaj: a) do liczby 2,3 liczbę 0,4 dopóki nie przekroczysz 8;
 b) do liczby 5,8 liczbę 1,2 dopóki nie przekroczysz 15;
 c) do liczby 0,04 liczbę 0,02 dopóki nie przekroczysz 0,2.
11. Oblicz:
 a) $24,63 + 59,46 + 815,19$; $0,526 + 63,2 + 463,12 + 1,5$;
 b) $618,2 + 46,583 + 1,649 + 118,7$; $0,649 + 0,512 + 6,211 + 214,25$;
 c) $3,72 + 248,4 + 12,78 + 2,9 + 46,35$; $6,4 + 0,48 + 25,04 + 1,4 + 0,62$;
 d) $8,94 + 1,0423 + 20,645 + 257,28 + 2,4385$;
 e) $2,8 + 624,1 + 3,2 + 2120,8 + 0,4621 + 21,6$.
12. Oblicz: a) $6,25\text{ m} + 14,4\text{ m} + 26,85\text{ m} + 236,2\text{ m} + 14,15\text{ m}$;
 b) $216,45\text{ zł} + 340,36\text{ zł} + 84,50\text{ zł} + 87,74\text{ zł} + 410,90\text{ zł}$;
 c) $0,95\text{ hl} + 4,84\text{ hl} + 11,4\text{ hl} + 200,04\text{ hl} + 25,6\text{ hl}$;
 d) $25,5\text{ km} + 65,624\text{ km} + 410,85\text{ km} + 0,432\text{ km} + 86,48\text{ km}$.
13. Następujące liczby są przybliżone:
 a) 2,547; b) 13,48; c) 0,046; d) 0,0063; e) 1,00026; f) 0,000068.
 Błąd każdej jest nie większy od pięciu jednostek jej ostatniego rzędu; wyznacz, w jakich granicach znajduje się dokładna liczba:
 Rozwiązanie: Jeżeli 0,047 jest liczbą przybliżoną, to liczba dokładna może być co najwyżej o 0,005 większa od liczby przybliżonej, albo też o 0,005 mniejsza. Wynosi zatem co najwyżej $0,047 + 0,005 = 0,052$, a co najmniej $0,047 - 0,005 = 0,042$.
14. Oblicz następujące sumy liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):
- | | | | |
|--------------|-------------|---------------|------------|
| a) 7,654 | b) 64,96 | c) 371,2 | d) 5,092 |
| 6,78 | 87,421 | 12,316 | 4,58 |
| 45,01 | 0,19 | 8,49 | 9,8 |
| 0,588 | 46,639 | 2,097 | 67,912 |
| <u>12,13</u> | <u>0,38</u> | <u>104,48</u> | <u>0,7</u> |
- e) $1,4 + 69,342 + 1,3 + 136,52 + 0,48 + 30,8$;
 f) $8,18 + 9,579 + 0,2 + 21,263 + 0,42 + 8,1 + 6,12$;

g) $846,4 + 1,2 + 8,45 + 0,532 + 1,7 + 216,48 + 7,912$;

h) $142 + 7,4 + 18 + 489,8 + 65 + 9,1 + 16,23$.

W sumie zachowujemy te miejsca dziesiętne, które występują we wszystkich składnikach. Z pozostałych miejsc możemy wziąć poprawkę.

Np.	3,25	76
	18,20	
	3,56	1
	25,02	

Liczmy $1 + 7 = 8$; poprawka 1, a następnie dodajemy jak zwykle. Aby ocenić błąd w wyniku, zauważmy, że w każdym składniku błąd nie przekracza liczby 0,05. Ponieważ składników jest 3, więc błąd w sumie nie przekracza $3 \times 0,05 = 0,15$ albo zaokrąglając do dziesiątych: 0,2.

Oceń w ten sposób błąd w każdym zadaniu!

Ćwiczenia

- Robotnik pracował w ciągu tygodnia: $7\frac{3}{4}$ godz., $8\frac{1}{3}$ godz., $7\frac{1}{2}$ godz., $6\frac{3}{4}$ godz., $7\frac{1}{3}$ godz., $7\frac{2}{3}$ godz. a) Oblicz, ile godzin pracował w ciągu całego tygodnia. b) Powtórz to zadanie, wyrażając czas pracy w każdym dniu zapomocą godzin i minut.
- Jaś wydał: $2\frac{1}{10}$ zł, $3\frac{3}{4}$ zł, $1\frac{3}{8}$ zł, $2\frac{9}{10}$ zł; oblicz, ile razem wydał: a) dodając liczby mieszane, b) wyrażając poszczególne wydatki w zł i gr, c) wyrażając poszczególne wydatki w liczbach dziesiętnych złotego.
- Kupiec sprzedał towaru: $1\frac{1}{4}$ kg, $\frac{3}{8}$ kg, $2\frac{3}{4}$ kg, $5\frac{1}{10}$ kg, $1\frac{1}{8}$ kg; oblicz, ile razem sprzedał: a) dodając liczby mieszane, b) wyrażając ciężary w kg i g, c) wyrażając ciężary w liczbach dziesiętnych kg.
- Wartość wyrobów gotowych, wywiezionych z Polski w 1930 r., wyrażona w milionach zł wynosi: przemysłu drzewnego 43,5; metalowego 216,8; garbarskiego 4,5; włókienniczego 9,4; chemicznego 49,7; odzieżowego 24; oblicz wartość całego wywozu! Oblicz wartość wywozu, zaokrąglając liczby do liczb całkowitych (milionów) i porównaj oba wyniki!
- Światowa produkcja aluminium w 1930 r., wyrażona w tysiącach tonn, wynosiła: w Stanach Zjednoczonych 103,9; w Kanadzie 34,9; w Niemczech 30,2; we Francji 26; w Norwegii 24,7; w Szwajcarii 20,5; w innych krajach 26,9; ile wynosiła razem na całym świecie?
Oblicz światową produkcję, zaokrąglając liczby do liczb całkowitych (tysięcy) i porównaj oba wyniki!

6. Oblicz obwód kwadratu o boku: a) $4\frac{1}{2}$ cm, b) 3,24 m, c) $4\frac{3}{8}$ km!
7. Ogród w kształcie prostokąta o wymiarach 30 m i 40 m obwiedziono ścieżką na 2 m szeroką; jaki jest zewnętrzny obwód tej ścieżki? Rysunek w skali 1 : 500!
8. Oblicz obwód prostokąta o bokach: a) 8 cm i $5\frac{3}{4}$ cm, b) 6,25 cm, i 8,5 cm, c) $5\frac{1}{4}$ km i $6\frac{3}{8}$ km!
9. Obwiązano paczkę w kształcie prostopadłościanu wzdłuż i wszerz sznurkiem. Długość tej paczki wynosiła 60 cm, szerokość $\frac{7}{12}$ długości, wysokość zaś $\frac{1}{3}$ szerokości; jak długi musiał być sznurek, jeśli 9 cm liczymy na węzeł?

Odejmowanie

Zadania

1. Oblicz: a) $\frac{7}{11} - \frac{5}{11}$, $\frac{4}{3} - \frac{1}{2}$, $\frac{9}{7} - \frac{3}{2}$, $\frac{7}{6} - \frac{5}{12}$, $\frac{2}{3} - \frac{8}{11}$.
b) $2 - \frac{4}{5}$, $5 - \frac{8}{15}$, $12 - \frac{7}{10}$, $8 - \frac{5}{6}$, $24 - \frac{11}{3}$.
2. Oblicz: a) $7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{4}$, $12\frac{3}{4} - 9\frac{1}{4}$, $25\frac{4}{5} - 12\frac{1}{5}$, $8\frac{3}{10} - 2\frac{1}{10}$.
b) $9\frac{1}{3} - 4\frac{2}{3}$, $14\frac{3}{8} - 9\frac{5}{8}$, $12\frac{1}{12} - 7\frac{7}{12}$, $15\frac{3}{6} - 9\frac{7}{6}$.
3. Oblicz: a) $11\frac{1}{2} - 2\frac{1}{3}$, $4\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$, $8\frac{1}{2} - 3\frac{5}{8}$, $6\frac{7}{8} - 2\frac{5}{8}$;
b) $23\frac{2}{5} - 11\frac{3}{10}$, $18\frac{1}{10} - 15\frac{4}{5}$, $12\frac{5}{12} - 6\frac{1}{6}$, $11\frac{7}{12} - 2\frac{1}{6}$.
4. Jaką liczbę należy dodać do $3\frac{7}{10}$, aby otrzymać $5\frac{1}{2}$?
5. Jaką liczbę należy odjąć od $12\frac{9}{10}$ aby otrzymać $4\frac{3}{4}$?
6. Jaka liczba jest o $2\frac{1}{4}$ mniejsza od $5\frac{1}{2}$?
7. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
a) $4\frac{1}{2} + x = 8$; $x + 8\frac{1}{2} = 12$; $5\frac{1}{3} + x = 10\frac{2}{3}$; $x + 4\frac{5}{8} = 8\frac{1}{4}$;
b) $4\frac{7}{12} = 2\frac{1}{3} + x$; $8\frac{1}{2} = x + 3\frac{1}{6}$; $8 - x = 2\frac{1}{3}$; $5\frac{3}{4} - x = 2\frac{1}{4}$.
8. Uzupełnij (zn. odejmij):
a) $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{5}{13}$ do 1; $1\frac{2}{3}$, $3\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{4}$, $7\frac{5}{12}$ do 10;
b) $2\frac{1}{3}$ do 5, $7\frac{8}{11}$ do 13, $6\frac{1}{3}$ do 15, $25\frac{6}{11}$ do 40.
9. Odejmuj, jak długo się da:
a) 0,5 od 5,8; b) 0,6 od 10,9; c) 0,04 od 0,18.
10. Oblicz: a) 28,16 - 12,14; 56,81 - 9,92; 45,21 - 5,93;
b) 264,5 - 14,65; 73,8 - 29,3814; 15,4 - 8,9006;
c) 8,0245 - 1,721; 76,844 - 12,4659; 85,4 - 67,9432.
11. Oblicz: a) $(47,82 - 16,704) + (23,44 - 12,084)$;
b) $(64,25 - 12,354) - (8,02 - 4,26)$;
c) $640,85 - (24,01 + 15,64) - 25,11$;
d) $241,012 + (63,04 - 26,145) - (21,63 + 0,49)$;
e) $(620 - 48,02) - (302,4 + 26,18) + 205,24$.
12. Oblicz: a) $16\frac{1}{2} + 4\frac{5}{12} - 8\frac{7}{12} - 2\frac{1}{2} + 4\frac{1}{12} - 3\frac{5}{12}$;
b) $2\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 3\frac{1}{4}$; $8\frac{5}{8} + 3\frac{1}{8} - 2\frac{3}{4}$; $12\frac{7}{15} - \frac{1}{2} + 4\frac{2}{3}$;

- c) $3 - \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}$; $24\frac{7}{10} - 8\frac{1}{2} + 2\frac{5}{8} - 1\frac{1}{8}$;
 d) $12\frac{1}{16} - 8\frac{1}{4} + 2\frac{1}{8} - 3\frac{5}{8} + 1\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$.
13. Oblicz: a) $14\frac{1}{2} - (6\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8})$; $20\frac{1}{4} - (8\frac{1}{2} + 2\frac{1}{8}) - (1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{2})$;
 b) $(22\frac{5}{8} + \frac{1}{2}) - (12\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8})$; $30 - (2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2}) - (4\frac{1}{6} - 1\frac{1}{3})$;
 c) $45 - (\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{8}) - (8\frac{3}{4} - 6\frac{1}{8})$.
14. Oblicz:
 a) $84,18 \text{ zł} - 62,46 \text{ zł}$; $4,83 \text{ m} - 2,94 \text{ m}$; $20,5 \text{ kg} - 3,725 \text{ kg}$;
 b) $12,48 \text{ ha} - 9,83 \text{ ha}$; $15,8 \text{ t} - 12,94 \text{ t}$; $4,5 \text{ l} - 2,25 \text{ l}$;
 c) $4,85 \text{ kg} - 3 \text{ kg } 416 \text{ g}$; $15 \text{ km}^2 \text{ } 86 \text{ ha} - 9 \text{ km}^2 \text{ } 95 \text{ ha}$;
 d) $8 \text{ t} - 5 \text{ t } 645 \text{ kg}$; $105 \text{ ha} - 18 \text{ ha } 9 \text{ a}$.
15. Wstaw w miejsce litery x odpowiednią liczbę:
 a) $25,84 + x = 35,96$; $x - 45,18 = 10$;
 b) $x - 2,6 = 3,45$; $64,13 - x = 4,02$;
 c) $(114,64 - x) + 18,4 = 96,04$; $(x - 8,14) + 12,2 = 15,04$;
 d) $(25,45 + x) + 5,6 = 80,01$; $(48,2 + x) - 10,2 = 100,06$.
16. Oblicz następujące różnice liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):
 a) $18,645$ b) $24,02$ c) $4,0056$ d) $6,432$
 $- 6,85$ $- 8,245$ $- 3,843$ $- 4,2845$

Uwaga: Podobnie jak przy dodawaniu, zachowujemy i w odejmowaniu tylko te miejsca dziesiętne, które występują równocześnie w danych liczbach. Liczymy więc: a) $18,64 - 6,85 = 11,79$.

17. Oblicz następujące wyrażenia, w których występują liczby przybliżone. (Błąd w każdej z nich jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):
 a) $64,281 - 2,14 + 8,645 + 10,16 - 3,24 - 2,461$;
 b) $104,2 - 6,461 - 0,61 + 3,65 + 5,84 - 10,24$;
 c) $280,12 - 40,2 - 1,45 - 2,651 + 15,8 - 20,36$;
 d) $615,2 - 89 + 2,1 - 3,46 - 18,2 + 3,45$.

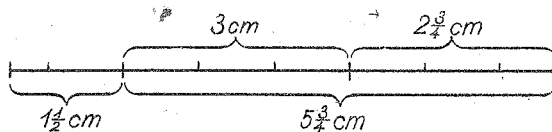
Zmiany sumy i różnicy

Zmiany sumy

Mamy dwa odcinki: jeden o długości 3 cm , drugi o długości $2\frac{3}{4} \text{ cm}$ (rys. 1). Ich suma wynosi $5\frac{3}{4} \text{ cm}$. Gdybyśmy jeden z nich (np. większy) powiększyli o $1\frac{1}{2} \text{ cm}$, to o $1\frac{1}{2} \text{ cm}$ wzrosnie także suma obu odcinków. Zatem:

$$(3 + 1\frac{1}{2}) + 2\frac{3}{4} = 5\frac{3}{4} + 1\frac{1}{2}.$$

A więc, o ile zwiększymy jeden składnik sumy, o tyle zwiększy się suma. To samo zachodzi dla sumy więcej liczb.

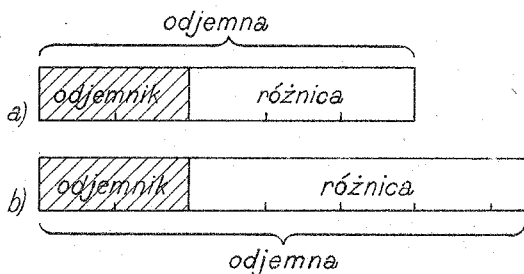


Rys. 1.

Oczywiście, że możemy również powiedzieć: O ile zmniejszymy jeden składnik sumy, o tyle zmniejszy się suma.

Zmiany różnicy.

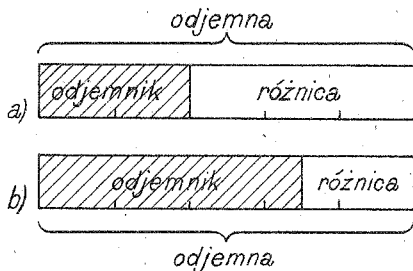
I. Na rys. 2 a mamy pasek o długości 5 cm , z którego odcięliśmy (część zacieniowaną) 2 cm . Pozostało więc cm : $5 - 2 = 3$. Gdybyśmy wzięli pasek długości o $1\frac{1}{2}\text{ cm}$ większej jak poprzednio i odcięli to samo (rys. 2 b), to różnica byłaby $1\frac{1}{2}\text{ cm}$ większa. A więc: $(5 + 1\frac{1}{2}) - 2 = 3 + 1\frac{1}{2}$. Widzimy zatem, że o ile powiększymy odjemną, o tyle powiększy się różnica.



Rys. 2.

Podobnie przekonywamy się, że o ile pomniejszymy odjemną, o tyle pomniejszy się różnica.

II. Przypuśćmy jak poprzednio, że z paska o długości 5 cm (rys. 3 a) odcięliśmy pasek o długości 2 cm . Pozostało więc cm :



Rys. 3.

$5 - 2 = 3$. Gdybyśmy odcięli pasek o $1\frac{1}{2}$ cm dłuższy niż poprzednio (rys. 3 b), to różnica byłaby o $1\frac{1}{2}$ cm krótsza. A więc:

$$5 - (2 + 1\frac{1}{2}) = 3 - 1\frac{1}{2}.$$

Widzimy stąd, że o ile powiększymy odjemnik, o tyle pomniejszy się różnica.

Podobnie przekonywamy się, że o ile pomniejszy odjemnik, o tyle powiększy się różnica.

Zadania

1. Jeden składnik sumy powiększyliśmy o a) $2\frac{3}{4}$, b) 1,45, drugi o a) $1\frac{2}{3}$, b) 2,34. O ile zwiększyła się suma?
2. Jeden składnik zwiększyliśmy o a) $5\frac{1}{3}$, b) 1,04, drugi zaś zmniejszyliśmy o a) $1\frac{2}{3}$, b) 0,12. O ile zwiększyła się suma?
3. Jeden składnik zmniejszyliśmy o a) $8\frac{5}{12}$, b) 10,04, drugi o a) $3\frac{1}{4}$, b) 6,41. O ile zmniejszyła się suma?
4. W sumie liczb przybliżonych jeden składnik jest o 0,008 większy od liczby dokładnej, drugi zaś o 0,01. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
5. W sumie liczb przybliżonych jeden składnik jest o 0,006 mniejszy od liczby dokładnej, drugi zaś o 0,012 większy. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
6. W sumie liczb przybliżonych pierwsza liczba jest o 0,04 większa od liczby dokładnej, druga o 0,003 mniejsza, trzecia o 0,005 większa, czwarta o 0,01 większa, piąta o 0,02 mniejsza od liczby dokładnej. O ile suma liczb przybliżonych jest większa od sumy liczb dokładnych?
7. Jak zmieni się różnica, jeżeli:
 - a) odjemną powiększymy o 4, $2\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{10}$; 3,4; 8,64;
 - b) odjemną pomniejszymy o 6, $3\frac{1}{4}$, $8\frac{3}{8}$; 9,6; 1,02;
 - c) odjemnik powiększymy o 3, $2\frac{7}{8}$, $4\frac{1}{8}$; 8,2; 0,41;
 - d) odjemnik pomniejszymy o 5, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{8}$; 0,6; 1,82.
 Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
8. Jak zmieni się różnica, jeżeli:
 - a) odjemną zwiększymy o $8\frac{1}{6}$, odjemnik zaś o $4\frac{1}{2}$;
 - b) odjemną zwiększymy o 6,21, odjemnik zaś zmniejszymy o 4,16;
 - c) odjemną zmniejszymy o $12\frac{1}{4}$, odjemnik zaś zwiększymy o $4\frac{1}{8}$;
 - d) odjemną zmniejszymy o 0,04, odjemnik zaś o 2,1.
 Objaśnij odpowiedzi na przykładach!
9. W różnicy dwu liczb przybliżonych odjemna jest o 0,004 większa od liczby dokładnej, odjemnik zaś o 0,01 mniejszy. O ile różnica liczb przybliżonych różni się od różnicy liczb dokładnych?

10. W różnicy dwu liczb przybliżonych odjemna jest o 0,01 większa od liczby dokładnej, odjemnik zaś o 0,0094. O ile różnica liczb przybliżonych różni się od różnicy liczb dokładnych?
11. W różnicy dwu liczb przybliżonych odjemna jest o 0,0045 mniejsza od liczby dokładnej, odjemnik zaś o 0,012 większy. O ile większa jest różnica liczb dokładnych od różnicy liczb przybliżonych?

Ćwiczenia

1. Rolnik posiadał dwa kawałki gruntu: jeden o powierzchni 3,4 ha i drugi o 75 a mniejszy; ile razem posiadał?
2. W naczyniu o pojemności 5 l było $2\frac{3}{4}$ l mleka, poczem odlano $1\frac{1}{2}$ l, a następnie dolano $1\frac{3}{4}$ l; ile l mleka brakuje, aby naczynie było pełne?
3. Ciężar brutto wynosi: a) 264 kg, b) 786,2 kg, c) 460 kg, d) $64\frac{1}{2}$ kg, netto zaś wynosi: a) 248,35 kg, b) 644,8 kg, c) 428,75 kg, d) $62\frac{3}{4}$ kg; ile wynosi tara?
4. Oblicz następujące różnice, zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne odpowiedniej jednostki:
 - a) 20 m 45 cm — 4 m 86 cm, 23 cm 5 mm — 16 cm 8 mm;
 - b) 85 hl 36 l — 14 hl 48 l, 5 l 8 dcl — 3 l 9 dcl;
 - c) 18 ha 46 a — 15 ha 94 a, 13 km² 96 ha — 8 km² 99 ha;
 - d) 45 t 465 kg — 19 t 684 kg, 84 kg 453 g — 49 kg 684 g.
5. 25 kg szynki waży po uwędzeniu 21,24 kg; ile wynosi strata na wadze wskutek uwędzenia?
6. Jajo waży $59\frac{1}{2}$ g, białko $29\frac{3}{4}$ g, żółtko zaś $21\frac{9}{10}$ g; ile waży skorupa?
7. Liczba listów, wyrażona w milionach, wynosiła w Polsce: 584,4 w 1924 r.; 672,3 w 1925 r.; 736,1 w 1926 r.; 832,7 w 1927 r.; 933,8 w 1928 r.; 999,2 w 1929 r.; oblicz przyrost z roku na rok i w czasie od 1924 r. do 1929 r. włącznie.
8. Światowy obrót handlowy, wyrażony w miliardach złotych, wynosił w roku 1929: w Europie 333,8; w Ameryce 162; w Azji 94,7; w Afryce 24,5; w Australji 16,6. W roku 1930 wynosił zaś: w Europie 287,2; w Ameryce 117,3; w Azji 72,9; w Afryce 20,2; w Australji 11,5. Oblicz ubytek obrotu handlowego w poszczególnych częściach świata, a następnie na całym świecie.
9. Obwód prostokąta wynosi: a) $35\frac{1}{2}$ cm, b) 38,4 m, c) $41\frac{3}{10}$ dcm, jeden zaś z boków: a) 7 cm, b) 10,75 m, c) $11\frac{2}{5}$ dcm; oblicz długość drugiego boku!

10. W prostokącie jeden bok wynosi: a) $64\frac{3}{4} m$, b) $8\frac{1}{10} dcm$, c) $4,65 m$; drugi jest o a) $5\frac{1}{2} m$, b) $1\frac{3}{4} dcm$, c) $0,86 m$ krótszy. Oblicz obwód!

Mnożenie

Zadania

1. Ile to jest:

- a) $\frac{3}{4}$ z 150 l, $\frac{5}{8}$ z 4 kg, $\frac{2}{3}$ z $\frac{6}{11} hl$, $\frac{11}{11}$ z 8 t, $\frac{11}{12}$ z $\frac{21}{4} g$;
 b) $\frac{4}{5}$ z 6 dcm, $\frac{11}{18}$ z 2 km, $\frac{11}{12}$ z $\frac{64}{7} m^2$, $\frac{19}{17}$ z 8 m³, $\frac{9}{19}$ z $\frac{3}{4} km^2$;
 c) $\frac{3}{5}$ z 8, $\frac{4}{7}$ z $\frac{2}{11}$, $\frac{13}{8}$ z 5, $\frac{4}{9}$ z $\frac{41}{12}$.

2. a) Ile to jest: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ tuzina?

- b) " " " $\frac{13}{12}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{9}{20}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{11}{60}$ kopy?

- c) " " " $\frac{3}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{3}{10}$, z 30?

- d) Ile to jest minut: $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{7}{30}$ godziny?

- e) Ile to jest godzin: $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{12}$ doby?

3. Oblicz: a) $15 \cdot \frac{3}{4}$, $\frac{1}{5} \cdot 8$, $7 \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{2}{5} \cdot 3$, $20 \cdot \frac{17}{11}$, $\frac{13}{13} \cdot 10$;

- b) $35 \cdot \frac{2}{35}$, $\frac{11}{12} \cdot 12$, $9 \cdot \frac{7}{7}$, $\frac{5}{17} \cdot 17$, $18 \cdot \frac{11}{18}$, $\frac{4}{51} \cdot 51$;

- c) $45 \cdot \frac{8}{15}$, $\frac{5}{6} \cdot 18$, $32 \cdot \frac{7}{8}$, $\frac{133}{144} \cdot 24$, $66 \cdot \frac{7}{11}$, $\frac{5}{18} \cdot 108$;

- d) $4 \cdot \frac{11}{6}$, $\frac{5}{12} \cdot 11$, $23 \cdot \frac{10}{11}$, $\frac{23}{5} \cdot 15$, $17 \cdot \frac{10}{18}$, $\frac{10}{6} \cdot 13$;

- e) $8 \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{1}{10} \cdot 50$, $12 \cdot \frac{7}{8}$, $\frac{7}{10} \cdot 25$, $111 \cdot \frac{23}{11}$, $\frac{19}{240} \cdot 36$;

- f) $2\frac{1}{10} \cdot 6$, $4\frac{1}{8} \cdot 2$, $5\frac{1}{2} \cdot 8$, $5\frac{1}{4} \cdot 7$, $4\frac{7}{8} \cdot 18$, $5\frac{3}{8} \cdot 12$;

- g) $4\frac{9}{10} \cdot 11$, $6\frac{1}{11} \cdot 20$, $7\frac{13}{14} \cdot 13$, $9\frac{7}{30} \cdot 11$, $8\frac{1}{2} \cdot 15$;

4. Oblicz: a) $\frac{7}{11} \cdot 12$, $\frac{7}{11} \cdot 10$, b) $\frac{1}{24} \cdot 25$, $\frac{1}{24} \cdot 23$;

- c) $\frac{1}{10} \cdot 20$, $\frac{1}{10} \cdot 18$; d) $\frac{11}{60} \cdot 61$, $\frac{1}{60} \cdot 59$;

- e) $\frac{23}{30} \cdot 30$, $\frac{23}{30} \cdot 28$; f) $\frac{29}{48} \cdot 49$, $\frac{29}{48} \cdot 47$.

Licz: $\frac{3}{8} \cdot 9 = \frac{3}{8} (8 + 1) = \frac{3}{8} \cdot 8 + \frac{3}{8} \cdot 1 = 3\frac{3}{8}$;

$\frac{3}{8} \cdot 7 = \frac{3}{8} (8 - 1) = 3 - \frac{3}{8} = 2\frac{5}{8}$.

5. Oblicz: a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$, $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{6}$, $\frac{12}{5} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{7}{6} \cdot \frac{14}{15}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$;

- b) $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4}$, $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{15}$, $\frac{2}{5} \cdot \frac{10}{13}$, $\frac{5}{24} \cdot \frac{9}{10}$, $\frac{7}{18} \cdot \frac{9}{2}$;

- c) $7 \cdot \frac{2}{3}$, $8 \cdot \frac{3}{16}$, $5 \cdot \frac{5}{9}$, $6 \cdot \frac{1}{3}$, $3 \cdot \frac{2}{7}$;

- d) $1\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$, $\frac{5}{4} \cdot 2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5} \cdot 7\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$;

- e) $3\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{2}$, $3 \cdot 5\frac{1}{2}$, $12\frac{1}{2} \cdot 5\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$, $10\frac{1}{7} \cdot 2\frac{1}{3}$.

6. Oblicz: a) $\frac{7}{15} \cdot \frac{10}{11}$, $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}$, $\frac{13}{15} \cdot \frac{1}{8}$, $\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$;

- b) $\frac{18}{5} \cdot \frac{1}{4}$, $2\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$, $6\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}$, $\frac{1}{11} \cdot 8\frac{3}{4}$;

- c) $5\frac{1}{9} \cdot 2\frac{1}{4}$, $9\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{3}$, $8\frac{2}{3} \cdot 4\frac{1}{2}$, $\frac{1}{15} \cdot 1\frac{1}{4}$;

- d) $4\frac{23}{25} \cdot \frac{10}{11}$, $\frac{10}{11} \cdot 2\frac{33}{4}$, $\frac{9}{14} \cdot 6\frac{1}{8}$, $5\frac{1}{8} \cdot 4\frac{1}{2}$;

- e) $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{7 \cdot 11} \cdot \frac{11}{3 \cdot 5}$, $\frac{8 \cdot 9}{5} \cdot \frac{15}{16 \cdot 18}$, $\frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{11 \cdot 13} \cdot \frac{26 \cdot 33}{4 \cdot 25 \cdot 7}$;

- f) $343 \cdot \frac{65}{48}$, $27 \cdot \frac{52}{29}$, $693 \cdot \frac{127}{162}$, $\frac{37}{10} \cdot \frac{71}{4}$;

- g) $\frac{125}{125} \cdot \frac{35}{6}$, $\frac{121}{121} \cdot \frac{39}{7}$, $\frac{500}{500} \cdot \frac{76}{31}$, $\frac{310}{310} \cdot \frac{167}{4}$;

- h) $\frac{19}{225} \cdot \frac{63}{5}$, $26\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$, $15\frac{1}{4} \cdot 36\frac{1}{2}$, $95 \cdot 100\frac{1}{11}$.

Uwaga. Uprość ułamki przed wykonaniem mnożenia!

7. Oblicz: a) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{9}$; b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}$; c) $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{2}$;
 d) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$; e) $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4}$; f) $\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{2}$; g) $\frac{5}{8} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{3}{4}$; h) $2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$;
 i) $3\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3$; j) $2\frac{2}{3} \cdot 2\frac{2}{3} \cdot 2$; k) $7 \cdot \frac{3}{5} \cdot 8\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$; l) $\frac{1}{3} \cdot 3\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{5}$.

8. Oblicz następujące wyrażenia:

- a) $(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4}) \cdot (\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{11})$; b) $\frac{1}{2} \cdot (\frac{3}{4} \cdot \frac{7}{2}) \cdot \frac{7}{9}$; c) $\frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \frac{4}{5}) \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{11})$;
 d) $\frac{3}{4} \cdot (\frac{2}{5} + \frac{1}{10}) \cdot \frac{5}{3}$; e) $\frac{3}{5} \cdot (\frac{4}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{7} + 1)$;
 f) $(\frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5}) \cdot (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{3} + \frac{3}{4})$.

Uwaga. Należy najpierw wykonać działania, oznaczone w nawiasach!

9. Oblicz: a) $\frac{8}{15} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{3}$, $\frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{8}$, $\frac{10}{21} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{3}{2}$;
 b) $\frac{75}{100} \cdot \frac{63}{48} \cdot \frac{27}{72}$, $\frac{42}{21} \cdot \frac{57}{91} \cdot \frac{26}{19}$, $\frac{42}{5} \cdot \frac{39}{95} \cdot \frac{38}{31} \cdot \frac{45}{60}$;
 c) $\frac{1}{8} \cdot 5\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7}$, $3\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{14} \cdot \frac{8}{3}$, $\frac{33}{30} \cdot 2\frac{2}{11} \cdot \frac{56}{44}$;
 d) $4\frac{23}{25} \cdot \frac{10}{41} \cdot 2\frac{32}{9}$, $3\frac{1}{3} \cdot \frac{41}{5} \cdot \frac{3}{70}$, $2\frac{5}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot 1\frac{11}{34}$.

Uwaga. Przed wykonaniem mnożenia należy zwrócić uwagę, czy któryś z liczników i mianowników nie ma wspólnego podzielnika. Jeśli wspólny podzielnik istnieje, należy przez niego uprościć.

$$\text{Np.: } \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{7}{6} = \frac{\overset{1}{3} \cdot \overset{1}{2} \cdot \overset{2}{10} \cdot \overset{1}{7}}{\underset{1}{5} \cdot \underset{1}{7} \cdot \underset{3}{9} \cdot \underset{3}{6}} = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2}{9}.$$

10. Sprawdź następujące równości:

- a) $(\frac{5}{12} + \frac{7}{8}) \cdot \frac{6}{5} = (\frac{5}{12} \cdot \frac{6}{5}) + (\frac{7}{8} \cdot \frac{6}{5})$;
 b) $(2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3}) \cdot \frac{5}{6} = (2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}) + (3\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6})$;
 c) $(\frac{25}{48} - \frac{1}{64}) \cdot \frac{36}{125} = (\frac{25}{48} \cdot \frac{36}{125}) - (\frac{1}{64} \cdot \frac{36}{125})$;
 d) $(2\frac{3}{8} - 1\frac{1}{2}) \cdot \frac{6}{9} = (2\frac{3}{8} \cdot \frac{6}{9}) - (1\frac{1}{2} \cdot \frac{6}{9})$.

11. Oblicz: a) $\frac{9}{10} \cdot 3$, $\frac{5}{100} \cdot 7$, $\frac{11}{1000} \cdot 3$, $\frac{23}{10000} \cdot 9$;

- b) $\frac{23}{100} \cdot 13$, $\frac{101}{1000} \cdot 17$, $\frac{103}{10000} \cdot 11$, $\frac{129}{1000000} \cdot 23$.

12. Pomnóż przez: a) 10, b) 100, c) 1000, następujące liczby:
 2,1356; 7,53; 0,0075; 2,1; 0,2.

13. Pomnóż przez a) 0,1; b) 0,01; c) 0,001 następujące liczby:
 7,3546; 25,4; 1,2; 0,035; 0,8.

14. Oblicz: a) $6,21 \times 10$; $13,5 \times 10$; $1,253 \times 10$; $6,21 \times 100$;
 $13,5 \times 100$; $1,253 \times 100$; $6,21 \times 1000$; $13,5 \times 1000$; $1,253 \times 1000$;

- b) $2,35 \times 0,1$; $6,325 \times \frac{1}{10}$; $2,55 \times 0,1$; $2,35 \times 0,001$;
 $6,524 \times \frac{1}{100}$; $4,82 \times \frac{1}{1000}$; $14,21 \times \frac{1}{10000}$; $63,81 \times 0,001$.

15. Oblicz: a) $2,5 \cdot 3,1$; $4,2 \cdot 7,3$; $35 \cdot 2,1$; $7,5 \cdot 4$; $0,3 \cdot 0,03$;

- b) $7,3 \cdot 2,01$; $0,5 \cdot 0,2$; $7,35 \cdot 0,031$; $25,01 \cdot 0,5$;

c) $0,07 \cdot 0,083$; $0,00032 \cdot 0,000075$; $0,105 \cdot 0,0024$; $0,03 \cdot 0,0052$.

16. Oblicz: a) $3,8 \cdot 0,4 \cdot 1,6$; $14,5 \cdot 0,9 \cdot 0,002$; $0,031 \cdot 40 \cdot 3,84$;

- b) $1,8 \cdot 4,6 \cdot 500 \cdot 0,2$; $3,8 \cdot 2,9 \cdot 0,4 \cdot 20$; $2,84 \cdot 0,356 \cdot 30 \cdot 0,06$;

- c) $2,7 \times 3,4 \times 0,5$; $0,2 \times 0,3 \times 0,5$; $0,273 \times 0,9 \times 5$;
 $60,8 \times 4,6 \times 0,9$; $84 \times 0,08 \times 0,2$.
17. Oblicz: a) $0,1^2$; $0,01^2$; $2,4^2$; $1,02^2$; $0,054^2$;
 b) $0,1^3$; $0,2^3$; $0,4^3$; $2,1^3$; $0,01^3$; $0,21^3$;
18. Oblicz następujące iloczyny, zamieniając ułamki na liczby dziesiętne: $\frac{1}{4} \times 2,13$; $\frac{1}{16} \times 0,32$; $0,01 \times \frac{6}{25}$.
19. Pomnóż przez 40, 600, 8000, następujące liczby:
 a) 19,465 m; 9,435 kg; 251,46 zł;
 b) 84,78 ha; 96,7225 km²; 105,6425 t.
20. Zamieniając liczby wielorakie na liczby dziesiętne: a) km;
 b) kg; c) m², oblicz następujące iloczyny:
 a) $2,4 \times 13$ km 420 m; $5,4 \times 1$ km 610 m; 4×12 m 3 dcm;
 b) 5×5 kg 410 g; $0,2 \times 27$ kg 350 g; $0,08 \times 2$ kg 4 dkg;
 c) $0,6 \cdot 7$ m² 14 dcm²; $1,6 \cdot 12$ m² 4 dcm².
21. Oblicz: a) $4,26 \cdot \frac{3}{8}$; $0,24 \cdot \frac{3}{8}$; $0,045 \cdot \frac{4}{5}$; $2,12 \cdot \frac{5}{4}$;
 b) $0,0042 \cdot \frac{5}{8}$; $4,125 \cdot \frac{3}{8}$; $1,02 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{2}$.
22. Oblicz: a) $(45,893 - 16,686) \cdot 0,8$; $(94,672 - 86,548) \cdot 0,9$;
 b) $(23,46 + 11,394) \cdot 0,5$; $(16,444 + 3,846) \cdot 0,7$;
 c) $(4,261 - 1,88) \cdot 0,04$; $(15 - 3,624) \cdot 0,006$.
23. Oblicz następujące wyrażenia:
 a) $(2,3 + 4,5) \cdot (0,3 + 3,6)$; $3,2 \cdot (2,5 \cdot 0,4) - 0,7$;
 b) $1,3 \cdot (25,4 - 8,4)$; $(12,4 + 1,06) \cdot (41,2 - 0,08)$;
 c) $14,37 - (2,54 \cdot 3) + (5,19 \cdot 5)$; $(5,18 \cdot 2) + (6,91 \cdot 0,3) - (5,14 \cdot 0,2)$.
24. Oblicz następujące iloczyny liczb przybliżonych (błąd w każdej liczbie jest nie większy od 5 jednostek jej najniższego rzędu):
 a) $8,56 \cdot 3,4$; $7,96 \cdot 4,1$; $4,56 \cdot 8,2$; $4,3 \cdot 8,12$;
 b) $3,4 \cdot 0,35$; $4,8 \cdot 0,34$; $76,9 \cdot 0,41$; $0,62 \cdot 0,041$;
 c) $0,21 \cdot 3,4 \cdot 2,3$; $1,4 \cdot 3,15 \cdot 0,85$; $25,08 \cdot 4,1 \cdot 0,05$;
 d) $1,87 \cdot 0,24 \cdot 2,005$; $0,04 \cdot 1,256 \cdot 2,0042$.

Rozwiązanie: cyframi znaczącymi danej liczby przybliżonej nazywamy te cyfry, które otrzymamy po odrzuceniu początkowych zer.

Np. 0,00305 ma trzy cyfry znaczące, 0,00030 ma dwie cyfry znaczące. W iloczynie liczb przybliżonych zachowujemy tyle cyfr znaczących, ile posiada ta liczba, która ma najmniej cyfr znaczących. A więc w iloczynie $7,41 \cdot 2,5$ zachowamy dwa miejsca znaczące.

Mamy zatem: $7,41 \cdot 2,5 = 18,525$ t. j. w przybliżeniu 18.

Cyfry odrzucone są niepewne. Nie należy jednak sądzić, że pozostawione cyfry są pewne lub, że błąd jest mniejszy od

5 jednostek najniższego zachowanego rzędu. Błąd może być stosunkowo wielki.

Np. iloczyn liczb dokładnych 8,37 i 0,116 wynosi 0,97092. Gdybyśmy obliczyli iloczyn liczb przybliżonych: $8,32 \cdot 0,111$, to otrzymalibyśmy: $8,32 \cdot 0,111 = 0,92352$.

Porównując oba wyniki widzimy, że błąd wynosi około 0,05 t. j. 5 jednostek przedostatniego rzędu zachowanego.

25. Oceń błąd, jaki popełniasz przy obliczaniu iloczynu przybliżonego w zadaniu poprzednim a) i b).

Rozwiązanie: Iloczyn liczb przybliżonych 2,6 i 0,37 wynosi 0,962. W iloczynie dokładnym mogą być czynniki co najwyżej o 5 jednostek najniższego rzędu większe, względnie mniejsze.

Iloczyn dokładny wynosi zatem co najwyżej: $3,1 \cdot 0,42 = 1,302$, a co najmniej $2,1 \cdot 0,32 = 0,672$. Porównując oba te wyniki z wartością iloczynu przybliżonego widzimy, że błąd jest mniejszy od 0,4.

Ćwiczenia

1. Ile otrzymamy, jeżeli od liczby 325 odejmiemy $\frac{1}{4}$ tej liczby?
2. Co jest większe: suma, czy iloczyn ułamków $\frac{2}{3}$ i $\frac{5}{4}$?
3. Ziemia przebiega w ciągu jednej sekundy $30\frac{1}{2} \text{ km}$; ile km przebiegnie w ciągu roku ($365\frac{1}{4}$ dni)?
4. Z kurka wodociągu nieszczelnie zamkniętego padają co trzy sekundy krople wody o objętości $0,1 \text{ cm}^3$; ile wody wycieknie w ciągu 24 godzin?
5. Śruba wkręca się o $\frac{3}{8} \text{ mm}$ za każdym obrotem; jak głęboko się wkręci po $15\frac{1}{2}$ obrotach?
6. Dwaj robotnicy za wykonanie pewnej pracy otrzymali razem 120 zł; pierwszy wykonał $\frac{3}{4}$ pracy, drugi resztę. Ile każdy z nich zarobił?
7. Za ile ma kupiec sprzedać towar, który go kosztował 300 zł, jeśli chce zarobić $\frac{3}{20}$ tego, co zapłacił?
8. Kupiec kupił $50\frac{1}{2} \text{ kg}$ towaru, płacąc $2\frac{1}{2} \text{ zł}$ za jeden kg ; chce zarobić $\frac{1}{5}$ tego, co zapłacił. a) Ile zapłacił za towar? b) Jaki będzie miał zysk? c) Jaka będzie cena sprzedaży 1 kg tego towaru?
9. Z dwóch miejscowości odległych od siebie o $97\frac{1}{2} \text{ km}$, wychodzą równocześnie naprzeciwko siebie dwaj posłańcy; jeden przebywa w ciągu godziny $4\frac{1}{2} \text{ km}$, drugi $5\frac{1}{2} \text{ km}$. W jakiej odległości od siebie będą po $6\frac{1}{2}$ godzinach?

10. Kwotę 3256 zł rozdzielono między cztery osoby tak, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{5}$, druga $\frac{1}{5}$, trzecia $\frac{1}{5}$, a czwarta resztę. Ile otrzymała każda osoba?
11. Rozdzielono 1200 zł pomiędzy 15 osób w ten sposób, że pomiędzy 10 osób rozdzielono $\frac{2}{3}$ całej sumy na równe części, a pomiędzy pozostałych 5 osób resztę również na równe części. Ile otrzymała każda osoba?
12. Ktoś wydał naprzód $\frac{2}{3}$ tej sumy pieniędzy, którą posiadał, a następnie $\frac{1}{3}$ reszty. Jaki ułamek ma jeszcze tej sumy, którą posiadał na początku?
13. Ktoś mierzył fałszywym metrem, mianowicie o $1\frac{1}{2}$ cm krótszym i wymierzył $15\frac{1}{2}$ m. Jaka jest prawdziwa długość?
14. Wapno gaszone zajmuje $3\frac{1}{2}$ razy większą objętość, aniżeli przed gaszeniem. Jaką objętość będzie miało $5\frac{1}{2}$ m³ wapna po gaszeniu?
15. Obwód pola w kształcie prostokąta wynosi 545 m, a szerokość jego wynosi $\frac{2}{3}$ długości. Jaka jest wartość tego pola, jeśli 1 m² kosztuje $\frac{1}{2}$ zł?
16. Oblicz w stopniach, minutach i sekundach kąt, jaki opisuje wskazówka mała (godzinowa) zegara w a) $\frac{7}{15}$ godz.; b) $\frac{5}{12}$ godz.; c) $1\frac{1}{4}$ godz.?
17. Trawa, po wysuszeniu na siano, traci $\frac{1}{10}$ swego ciężaru. Jaka jest wartość zbiorów z łąki, która po pierwszym skoszeniu dała 12 t trawy, a przy drugim $\frac{2}{3}$ tej ilości, jeśli t siana kosztuje 75 zł?
18. Brukarze wybrukowali trzy ulice o wymiarach $11\frac{1}{2}$ m i $98\frac{1}{2}$ m, $10\frac{1}{2}$ m i $72\frac{1}{2}$ m, 12 m i $110\frac{1}{2}$ m; ile należy się brukarzom za robotę, jeśli 1 m² kosztuje $1\frac{1}{2}$ zł?
19. Sztuka płótna miała $\frac{1}{4}$ m szerokości, a $25\frac{1}{2}$ m długości. Po wypraniu straciła $\frac{1}{10}$ swej szerokości i $\frac{1}{10}$ swej długości; ile m² ma teraz ta sztuka płótna?
20. 30 mężczyzn, 20 kobiet i 15 dzieci urządziło wycieczkę, która przeciętnie kosztowała 2 zł za jedno dziecko, za jedną kobietę $\frac{1}{2}$ tego, co za dziecko i za jednego mężczyznę $\frac{1}{2}$ tego, co za dziecko; ile kosztowała wycieczka?
21. Ogrodzono plac w kształcie kwadratu o boku: a) 28 m, b) 31,5 m, c) $29\frac{1}{2}$ m płotem, którego 1 m kosztował: a) 4 zł, b) 4,5 zł, c) $4\frac{1}{2}$ zł; ile kosztowało całe ogrodzenie?
22. Oblicz obwód trójkąta równobocznego o boku: a) $7\frac{3}{4}$ cm, b) 8,76 m, c) $3\frac{3}{8}$ km!
23. Oblicz obwód sześciokąta umiarowego o boku: a) $5\frac{1}{8}$ dcm, b) 9,64 km, c) $4\frac{3}{8}$ cm!

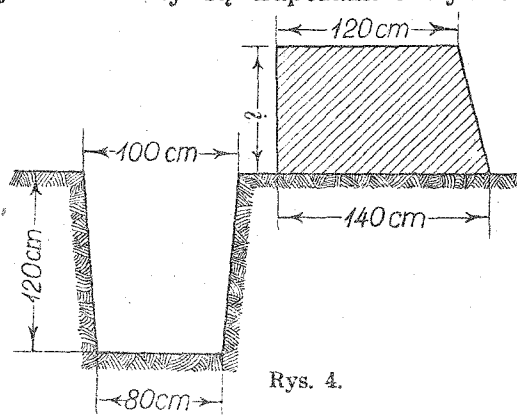
24. Oblicz obwód wielokąta umiarowego, którego bok wynosi 8 cm , a w którym liczba boków wynosi: a) 5, b) 7, c) 10, d) 20.
25. Oblicz obwód koła, którego promień równa się: a) 4 cm , b) $1\frac{1}{4}\text{ m}$, c) $2,25\text{ dcm}$, przyjmując $\pi = 3,14$.
26. Jedno z kół samochodu wykonało podczas jazdy z miasta A do miasta B 60 000 obrotów. Jaka jest odległość tych miast, jeżeli promień koła wynosi 33 cm ?
27. Duża wskazówka zegara ma 2 cm , mała 14 mm , a ta która wskazuje sekundy 6 mm . Jaką drogę opisze koniec każdej z tych wskazówek w ciągu: a) doby, b) tygodnia, c) roku?
28. Oblicz pole kwadratu o boku: a) $3\frac{1}{2}\text{ m}$, b) $5\frac{3}{4}\text{ cm}$, c) $2,4\text{ dcm}$, d) $0,2\text{ cm}$!
29. Stół kwadratowy o boku $0,9\text{ m}$ przykryty jest serwetą, która zwisa dookoła stołu na szerokość $0,25\text{ m}$; jakie jest pole tej serwety?
30. Oblicz pole prostokąta o wymiarach: a) $5\frac{1}{2}\text{ m}$ i $4\frac{3}{4}\text{ m}$, b) $2,4\text{ dcm}$ i $5,8\text{ dcm}$, c) $6\frac{5}{8}\text{ km}$ i $7\frac{1}{2\frac{1}{5}}\text{ km}$!
31. Oblicz pole równoległoboku, którego podstawa wynosi: a) 3 m , b) $4,6\text{ m}$, c) $2\frac{3}{4}\text{ dcm}$, wysokość zaś: a) $1\frac{1}{2}\text{ m}$, b) $3,64\text{ m}$, c) $1\frac{1}{8}\text{ dcm}$!
32. W ścianie o długości $6,28\text{ m}$ mają być wybite drzwi, szerokie na $1,26\text{ m}$, w ten sposób, żeby krawędzie boczne drzwi były równo odległe od odpowiednich krawędzi bocznych ściany. Oblicz a) odległość bocznej krawędzi drzwi od odpowiedniej bocznej krawędzi ściany, b) pole drzwi, jeżeli ich wysokość wynosi $2,15\text{ m}$, c) pole ściany (bez drzwi), jeśli wysokość ściany wynosi $4,25\text{ m}$, d) zaokrąglij wyniki otrzymane w b) i c) w dcm^2 !
33. Oblicz pole trójkąta prostokątnego, którego podstawa wynosi: a) 6 cm , b) $8,4\text{ dcm}$, c) $10\frac{1}{4}\text{ m}$, wysokość zaś: a) $4\frac{1}{2}\text{ cm}$, b) $10,85\text{ dcm}$, c) $12\frac{1}{8}\text{ m}$!
34. Oblicz pole trójkąta, którego podstawa wynosi: a) 15 m , b) $16,45\text{ dcm}$, c) $12\frac{5}{8}\text{ km}$, wysokość zaś: a) $14\frac{1}{2}\text{ m}$, b) $18,55\text{ dcm}$, c) $14\frac{1}{4}\text{ km}$!
35. Oblicz pole trapezu, którego boki równoległe mają: a) 3 m i 5 m , b) $2,8\text{ dcm}$ i $4,6\text{ dcm}$, c) $3\frac{1}{4}\text{ cm}$ i $5\frac{3}{8}\text{ cm}$, wysokość zaś wynosi: a) $2\frac{1}{2}\text{ m}$, b) $3,5\text{ dcm}$, c) $4\frac{1}{2}\text{ cm}$!
36. Narysuj sześciokąt umiarowy o boku 5 cm , zmierz odległość jego środka od boku, a następnie oblicz jego pole.
37. Przekątna czworokąta ma długość $157,4\text{ m}$ i dzieli ten czworokąt na 2 trójkąty, z których jeden ma wysokość $74,6\text{ m}$, drugi zaś $96,4\text{ m}$, przy czym wysokości te są prostopadłe do przekątnej; oblicz pole tego czworokąta! Rysunek w skali 1:500!

38. Oblicz pole koła, którego promień równa się: a) 3 m , b) $4\frac{1}{2}\text{ cm}$, c) $8,7\text{ cm}$, d) $5\frac{3}{4}\text{ dcm}$, przyjmując za liczbę π jednym razem $\frac{22}{7}$, drugim razem $3,14$!
39. Oblicz pole pierścienia, zawartego między dwoma kołami współśrodkowymi o promieniach: a) 6 m i 4 m , b) $4,6\text{ dcm}$ i $2,8\text{ dcm}$, c) $5\frac{1}{4}\text{ km}$ i $4\frac{1}{8}\text{ km}$!
40. W kwadrat o obwodzie 55 dcm wpisano koło. Oblicz jego pole! O ile jest ono mniejsze od pola kwadratu? Rysunek w skali $1:10$!
41. Oblicz pole powierzchni sześcianu o krawędzi: a) $3\frac{1}{2}\text{ cm}$, b) $5,8\text{ dcm}$, c) $14\frac{3}{8}\text{ m}$! Narysuj siatkę w odpowiedniej skali!
42. Bryłę marmuru, w kształcie sześcianu o krawędzi $1,4\text{ m}$, oszlifowano na całej powierzchni; ile zapłacono za tę pracę, jeśli za 1 m^2 płacono $8\text{ zł } 50\text{ gr}$?
43. Oblicz powierzchnię prostopadłościanu o wymiarach: a) 2 cm , 5 cm , 8 cm ; b) $3,4\text{ dcm}$, $5,8\text{ dcm}$, 6 dcm ; c) $4\frac{1}{2}\text{ m}$, $6\frac{1}{4}\text{ m}$, $7\frac{3}{8}\text{ m}$! Narysuj siatki w odpowiedniej skali!
44. Pokój ma 8 m długości, $4,5\text{ m}$ szerokości, a 4 m wysokości. Podłoga kosztowała po 15 zł za 1 m^2 , tynkowanie zaś po 5 zł za 1 m^2 . Ile kosztowały razem podłoga i tynkowanie pokoju?
45. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm , którego podstawa jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych 4 cm i 5 cm . Narysuj siatkę!
46. Oblicz powierzchnię graniastosłupa prostego o wysokości 6 cm , którego podstawa jest trójkątem równoramiennym, przyczem podstawa tego trójkąta ma $4\frac{1}{2}\text{ cm}$, wysokość zaś $5\frac{1}{2}\text{ cm}$. Brakujące wymiary znajdź przy pomocy rysunku i pomiaru!
47. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego (w skali $1:100$) o wysokości $3\frac{3}{4}\text{ m}$, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 2 m i oblicz jego pole, mierząc na siatce odległość środka trójkąta od boku!
48. Narysuj siatkę graniastosłupa prostego (w skali $1:25$) o wysokości $7,5\text{ dcm}$, którego podstawa jest sześciokątem umiarem o boku 5 dcm , i oblicz jego pole, mierząc na siatce odległość środka sześciokąta od boku!
49. Oblicz powierzchnię walca prostego, którego podstawa jest kołem o promieniu: a) $4\frac{1}{2}\text{ dcm}$, b) $8,6\text{ dcm}$, c) $9\frac{1}{4}\text{ m}$, a którego wysokość wynosi: a) 5 dcm , b) $12,4\text{ dcm}$, c) $20\frac{1}{2}\text{ m}$. Narysuj siatkę w skali: a) $1:20$, b) $1:100$, c) $1:1000$.
50. Podstawa rury walcowej ma promień zewnętrzny 4 cm , wewnętrzny 3 cm , długość zaś rury wynosi 6 cm ; oblicz powierzchnię tej rury! Siatka!

51. Sporządź model sześcianu, którego krawędź wynosi 5 cm, i oblicz jego objętość!
52. Oblicz objętość sześcianu, którego krawędź wynosi: a) $9\frac{1}{2}$ cm, b) 4,6 m, c) $8\frac{3}{4}$ dcm.
53. Jaki jest ciężar sześcianu, o krawędzi 1,2 m wykutego z granitu, którego 1 cm^3 waży 2,65 g?
54. Sporządź model prostopadłościanu o wymiarach: $2\frac{1}{2}$ cm, 4 cm, 6 cm i oblicz jego objętość!
55. Oblicz objętość prostopadłościanu o wymiarach: a) 2 cm, $4\frac{1}{2}$ cm, $5\frac{1}{2}$ cm, b) 4,2 dcm, 5,4 dcm, 6 dcm, c) $2\frac{1}{2}$ m, $4\frac{3}{4}$ m, 6 m, d) 5 dcm, $4\frac{3}{4}$ dcm, 9 cm!
56. Ciało zanurzone w płynie traci pozornie tyle na swym ciężarze, ile waży płyn przez to ciało wyparty (t. zn. płyn tej samej objętości, co ciało). Jeżeli więc np. 1 dcm^3 z mosiądzu wrzucimy do wody, to on w wodzie waży 8,5 kg — 1 kg = 7,5 kg, gdyż 1 dcm^3 mosiądzu w powietrzu waży 8,5 kg, a 1 dcm^3 wody waży 1 kg.
Sześciian z mosiądzu o krawędzi: a) 4 cm, b) 8,7 cm, c) $6\frac{1}{4}$ cm, wrzucono do wody; ile waży ten sześciian w wodzie?
57. Jaki jest ciężar prostopadłościanu z ołowiu, którego 1 cm^3 waży 11,34 g, jeśli wymiary prostopadłościanu są: a) $3\frac{1}{2}$ cm, 4 cm, $5\frac{3}{4}$ cm; b) 4,2 cm, 5,4 cm, 8 cm; c) $6\frac{1}{4}$ cm, $8\frac{1}{4}$ cm, 10 cm. Ile straci pozornie ten prostopadłościan na ciężarze, jeżeli go całkiem zanurzymy w wodzie?
58. Sporządź model graniastoslupa prostego o wysokości 5 cm, którego podstawa jest trójkątem równobocznym o boku 2 cm; oblicz jego objętość, mierząc na modelu wysokość podstawy!
59. Sporządź model graniastoslupa prostego o wysokości 8 cm, którego podstawa jest sześciokątem umiarkowanym o boku $2\frac{1}{2}$ cm. Oblicz jego objętość, mierząc na modelu odległość środka podstawy od boku!
60. Graniastosłup prosty, zrobiony z drzewa dębowego, o wysokości 8 cm, ma za podstawę romb, w którym przekątne wynoszą 4 cm i 3 cm; oblicz ciężar tego graniastoslupa, wiedząc, że 1 cm^3 drzewa dębowego waży 0,7 g!
61. Podstawą graniastoslupa prostego o wysokości 7 cm jest czworokąt, w którym jedna przekątna wynosi 3 cm i dzieli go na dwa trójkąty o wysokościach 4,5 cm i 2 cm, (przekątna jest wspólną podstawą trójkątów). Oblicz objętość tego graniastoslupa!
62. Rów ma kształt graniastoslupa prostego na 8 m długiego, któ-

rego podstawa jest trapezem równoramiennym o bokach równoległych 2 m i 3 m , przyczem wysokość trapezu równa się $1,8\text{ m}$. Oblicz, ile *hl* wody ten rów pomieści!

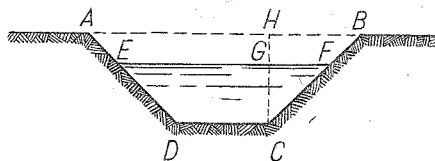
63. Sporządź model walca obrotowego o wysokości 6 cm , którego podstawa ma promień $1\frac{1}{2}\text{ cm}$, i oblicz jego objętość!
64. Oblicz objętość walca obrotowego, którego podstawa ma promień: a) 7 cm , b) $4,8\text{ dcm}$, c) $6\frac{1}{4}\text{ m}$, a którego wysokość wynosi: a) $1\frac{1}{2}\text{ dcm}$, b) $8,2\text{ dcm}$, c) $10\frac{1}{4}\text{ m}$.
65. Oblicz, ile waży rura walcowa żelazna, $3,5\text{ m}$ długa, której promień zewnętrzny wynosi $2,8\text{ dcm}$, wewnętrzny zaś $2,4\text{ dcm}$, jeżeli 1 m^3 żelaza waży $7,25\text{ t}$!
66. Do menzurki, której podstawa ma promień 5 cm , wrzucono ciało tak, że zupełnie się zanurzyło, wskutek czego poziom wody w menzurce podniósł się o 14 cm . Jaka jest objętość tego ciała?
67. Piechota wykopała rów strzelecki, a następnie zrobiła z wykopanej ziemi zasłonę (rys. 4). Zarówno przekrój rowu strzeleckiego, jak i zasłony są trapezami o wymiarach podanych



Rys. 4.

na rysunku. Oblicz a) pole przekroju rowu, b) wysokość zasłony, c) ilość wykopanej ziemi jeśli rów był na 500 m długi, d) liczbę żołnierzy potrzebnych do wykopania tego rowu w przeciągu $2\frac{1}{2}$ godziny, jeśli jeden żołnierz w ciągu jednej godziny wykopie $\frac{1}{2}\text{ m}^3$ ziemi.

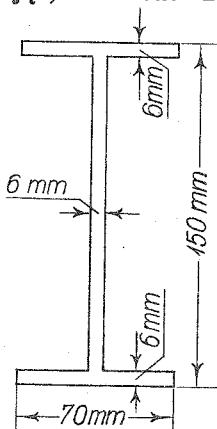
68. Wykopano rów osuszający, którego przekrój jest trapezem równoramiennym (rys. 5), przyczem: $AB = 3,6\text{ m}$, $DC = 1,2\text{ m}$, $EF = 2,8\text{ m}$, $CG = 0,8\text{ m}$, $GH = 0,4\text{ m}$. Oblicz: a) pole trapezu $ABDC$ (tak zwane pole wykopu), b) pole trapezu $EFCD$ (pole przekroju wody), c) objętość wody w rowie długim na



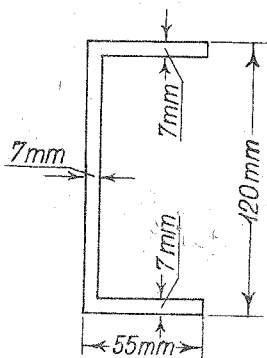
Rys. 5.

800 m, d) rys. 5 przedstawia plan przekroju rowu w skali 1:100; zmierz długość odcinka ED i oblicz długość linii łamanej $EDCF$, czyli t. zw. obwód zwilżony. e) oblicz pole powierzchni zwilżonej rowu, długiego na 600 m.

69. Na rys. 6 zaznaczone są wymiary przekroju dźwigara żelaznego. Oblicz: a) pole tego przekroju, b) objętość dźwigara długiego na 8 m, c) ciężar 6 takich dźwigarów, podtrzymujących sufit, przyjmując, że 1 cm^3 żelaza waży 7,5 g.



Rys. 6.



Rys. 7.

70. Na rys. 7 zaznaczone są wymiary przekroju dźwigara żelaznego. Oblicz: a) pole tego przekroju, b) objętość dźwigara długiego na 6,5 m, c) jego ciężar, przyjmując, że 1 cm^3 żelaza waży 7,5 g.

Dzielenie

Zadania

- Oblicz: a) $\frac{2\frac{1}{2}}{3}:6$, $\frac{2\frac{1}{2}}{3}:8$, $\frac{7}{3}:7$, $\frac{1\frac{1}{2}}{3}:15$, $\frac{3\frac{1}{2}}{3}:11$;
b) $\frac{1\frac{8}{15}}{3}:6$, $\frac{1\frac{8}{15}}{3}:12$, $\frac{1\frac{8}{15}}{3}:24$, $\frac{9\frac{5}{7}}{7}:19$, $\frac{8\frac{7}{10}}{10}:29$;
c) $\frac{7}{3}:2$, $\frac{1\frac{2}{3}}{3}:5$, $\frac{1\frac{1}{5}}{5}:7$, $\frac{7}{15}:8$, $\frac{11}{8}:9$.
d) $5\frac{1}{11}:7$, $11\frac{5}{9}:13$, $14\frac{1}{4}:19$, $5\frac{1}{4}:6$, $10\frac{9}{17}:15$;
e) $38\frac{1}{4}:5$, $4\frac{2}{3}:9$, $13\frac{7}{17}:19$, $4\frac{4}{5}:8$, $23\frac{2}{3}:9$.

2. Przed wykonaniem dzielenia uprość:

- a) $\frac{8}{9} : 12$, $\frac{12}{25} : 42$, $\frac{16}{5} : 24$, $\frac{21}{13} : 14$, $\frac{45}{112} : 30$;
 b) $\frac{45}{13} : 15$, $\frac{56}{7} : 72$, $\frac{72}{99} : 96$, $\frac{81}{29} : 72$, $\frac{96}{48} : 36$;
 c) $8\frac{1}{2} : 17$, $7\frac{2}{3} : 23$, $8\frac{4}{5} : 22$, $18\frac{3}{4} : 50$, $13\frac{1}{3} : 75$.

3. Podaj odwrotności następujących liczb:

- a) $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{9}$; b) 3, 5, 10; c) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $7\frac{2}{5}$, $5\frac{1}{3}$.

4. Oblicz: a) $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$, $\frac{7}{8} : \frac{8}{25}$, $\frac{1}{3} : \frac{3}{8}$, $\frac{7}{15} : \frac{7}{25}$, $\frac{12}{5} : \frac{18}{5}$;

- b) $3 : \frac{2}{3}$, $7 : \frac{1}{5}$, $2 : \frac{3}{8}$, $9 : \frac{3}{4}$, $10 : \frac{100}{11}$;

- c) $2\frac{1}{2} : \frac{7}{5}$, $1\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4}$, $3 : 2\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} : 1\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{4}$;

- d) $\frac{8}{15} : \frac{4}{15}$, $\frac{1}{6} : \frac{1}{42}$, $\frac{5}{8} : \frac{1}{48}$, $\frac{20}{21} : \frac{1}{4}$, $\frac{32}{31} : \frac{11}{11}$;

- e) $8 : \frac{4}{5}$, $6 : \frac{2}{7}$, $\frac{65}{72} : \frac{13}{72}$, $\frac{90}{90} : \frac{1}{10}$, $\frac{8}{5} : \frac{4}{5}$;

- f) $7\frac{2}{3} : \frac{2}{3}$, $4\frac{3}{8} : \frac{5}{8}$, $5\frac{5}{12} : 1\frac{3}{12}$, $11\frac{1}{2} : 2\frac{3}{2}$, $6\frac{14}{15} : 11\frac{1}{15}$;

- g) $3\frac{5}{24} : 3\frac{1}{18}$, $13\frac{1}{4} : 2\frac{2}{5}$, $4\frac{21}{25} : 5\frac{2}{15}$, $2\frac{8}{5} : 3\frac{4}{5}$, $15\frac{9}{20} : 1\frac{0}{5}$.

5. Oblicz: a) $369 : 4\frac{1}{4}$, $27 : 1\frac{08}{113}$, $\frac{51}{26} : \frac{68}{55}$;

- b) $17\frac{3}{13} : \frac{49}{52}$, $107 : 35\frac{2}{3}$, $7\frac{1}{32} : 7\frac{1}{16}$;

- c) $6\frac{86}{121} : 1\frac{2}{11}$, $5\frac{7}{121} : 5\frac{35}{44}$, $\frac{477}{187} : \frac{211}{561}$.

Po zamianie ilorazu na iloczyn uprość!

6. Ile wynosi mnożna, jeżeli:

- a) iloczyn wynosi $\frac{3}{4}$, a mnożnik $\frac{5}{7}$; b) iloczyn wynosi $1\frac{1}{2}$, a mnożnik $\frac{8}{11}$; c) iloczyn wynosi $3\frac{1}{4}$, a mnożnik $1\frac{8}{9}$?

7. Ile wynosi mnożnik, jeżeli:

- a) iloczyn wynosi $1\frac{7}{12}$, a mnożna $\frac{5}{8}$; b) iloczyn wynosi $3\frac{1}{6}$, a mnożna $2\frac{3}{2}$; c) iloczyn wynosi $4\frac{1}{2}$, a mnożna $3\frac{1}{4}$?

8. Jaką liczbę należy wstawić w miejsce litery x w następujących równościach:

- a) $x \cdot \frac{3}{4} \text{ zł} = 18 \text{ zł}$; $x \cdot \frac{3}{10} \text{ l} = 1\frac{1}{2} \text{ l}$;

- b) $x \cdot \frac{4}{5} \text{ kg} = 1\frac{7}{2} \text{ kg}$; $x \cdot \frac{2}{5} \text{ godz.} = 2\frac{1}{2} \text{ godz.}$;

- c) $x \cdot \frac{5}{2} \text{ km} = 1\frac{9}{4} \text{ km}$; $x \cdot \frac{3}{25} \text{ m}^2 = 4\frac{1}{2} \text{ m}^2$;

- d) $\frac{5}{4} \cdot x \text{ cm} = 1\frac{1}{2} \text{ cm}$; $\frac{11}{4} \cdot x \text{ l} = \frac{3}{5} \text{ l}$;

- e) $1\frac{1}{2} \cdot x \text{ kg} = 3\frac{1}{5} \text{ kg}$; $1\frac{1}{2} \cdot x \text{ godz.} = 2\frac{1}{2} \text{ godz.}$;

- f) $5\frac{3}{4} \cdot x \text{ zł} = \frac{5}{8} \text{ zł}$; $3\frac{1}{8} \cdot x \text{ m}^2 = 1\frac{3}{4} \text{ m}^2$.

9. Przekonaj się o prawdziwości następujących równości:

- a) $(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}) : \frac{4}{5} = (\frac{2}{3} : \frac{4}{5}) + (\frac{1}{4} : \frac{4}{5})$;

- b) $(\frac{1}{4} + 5\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4}) : \frac{7}{8} = (\frac{1}{4} : \frac{7}{8}) + (5\frac{2}{3} : \frac{7}{8}) + (1\frac{1}{4} : \frac{7}{8})$;

- c) $(5\frac{3}{8} - \frac{21}{4}) : \frac{8}{9} = (5\frac{3}{8} : \frac{8}{9}) - (\frac{21}{4} : \frac{8}{9})$;

- d) $(6\frac{1}{2} - \frac{4}{5} + 8\frac{3}{4}) : \frac{5}{8} = (6\frac{1}{2} : \frac{5}{8}) - (\frac{4}{5} : \frac{5}{8}) + (8\frac{3}{4} : \frac{5}{8})$.

10. Przez co trzeba pomnożyć liczbę $3\frac{1}{2}$, aby otrzymać 4?

11. Iloczyn dwóch liczb wynosi $1\frac{1}{8}$; jedna z tych liczb jest $2\frac{1}{4}$. Ile wynosi druga?

12. Ile razy można odejmować $\frac{3}{4}$ od $4\frac{3}{4}$?

13. Jaka liczba podzielona przez: a) $\frac{3}{4}$, b) $2\frac{1}{4}$, c) $5\frac{3}{4}$, daje iloraz a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{11}{8}$, c) $3\frac{1}{4}$?
14. a) Jaka liczba jest swoją własną odwrotnością?
b) Jeżeli liczba jest mniejsza od 1, to jej odwrotność jest większa od 1; podaj przykłady!
c) Iloczyn liczby przez jej odwrotność równa się jedności; podaj przykłady!
15. Oblicz: a) $17,4 : 6$; $0,414 : 9$; $8,0037 : 9$; $5,92 : 16$;
b) $40,32 : 24$; $248,16 : 75$; $557,91 : 15$; $0,728 : 140$;
c) $225,36 : 18$; $0,1568 : 49$; $11,322 : 306$; $0,4263 : 87$.
16. Podziel następujące liczby: 3,71; 23,573; 0,941; 0,2 przez:
a) 0,1; b) 0,01; c) 0,001; przekonaj się, że otrzymasz iloraz, przesuwając kropkę odpowiednio o jedno, dwa, trzy miejsca na prawo!
17. Oblicz: a) $3,45 : 100$; $17,51 : 1000$; $1272,7 : 10$; $0,1 : 10$; $0,01 : 100$, $0,001 : 1000$;
b) $2,34 : 0,1$; $0,45 : 0,01$; $18,12 : 0,001$; $0,02 : 0,0001$; $47 : 0,01$; $1 : 0,001$.
18. Oblicz następujące ilorazy:
a) $2,7 : 1,2$; $36,54 : 4,5$; $7,2 : 2,5$; $2,8 : 11,2$;
b) $5,6 : 0,35$; $0,231 : 0,22$; $0,003 : 9,6$; $0,102 : 0,34$;
c) $2295,06 : 5,8$; $176,244 : 0,38$; $7,0567 : 1,19$; $3,84 : 2,56$;
d) $65142 : 0,6$; $22,62 : 0,006$; $5,068 : 2,8$;
e) $2,508 : 0,66$; $9,7704 : 9,2$; $0,61728 : 0,0096$;
f) $0,000\ 03 : 0,002$; $0,000\ 07 : 0,000\ 005$; $3 : 0,000\ 016$;
g) $0,53 : 0,2$; $5,7 : 0,5$; $15,7 : 3,51$; $0,083 : 0,0005$.
19. Oblicz: a) $2\ m\ 7\ cm : 0,3$; $3\ km\ 240\ m : 1,8$; $1\ m\ 2\ decm\ 6\ cm : 0,24$;
b) $5\ q\ 67\ kg : 2,1$; $4\ t\ 5\ q\ 76\ kg : 0,11$; $7\ kg : 0,056$.
Zamień liczby mianowane na dziesiętne odpowiedniej jednostki!
20. Przez jaką liczbę należy pomnożyć: a) 3,7; b) 75,6; c) 0,803;
d) 0,00025, aby otrzymać a) 0,0037, b) 0,756; c) 80,3; d) 2,5?
21. Oblicz: a) $8,82 : \frac{5}{8}$; $0,16 : \frac{4}{5}$; $2,4 : \frac{8}{7}$; $2,1 : \frac{6}{5}$;
b) $19,23 : 3\frac{1}{2}$; $10,152 : 31\frac{1}{2}$; $11,652 : 2\frac{1}{2}$;
c) $6,832 : 1\frac{0,3}{12}$; $14,186 : 1\frac{1}{8}$; $9,085 : 4\frac{1}{4}$.
22. Przedstaw następujące ułamki: $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{11}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{8}{3}$, jako ilorazy i oblicz ich wartość do trzech miejsc znaczących.
23. Oblicz następujące ilorazy liczb przybliżonych:
a) $2,4 : 1,65$; $0,41 : 1,25$; $4,62 : 0,056$;
b) $0,000485 : 0,021$; $245,1 : 0,45$; $2684 : 0,16$.

Rozwiązanie: $Np. 3,26:0,045 = 72,4...$

W ilorazie liczb przybliżonych zachowujemy tyle miejsc znaczących, ile posiada liczba mająca najmniej cyfr znaczących. W naszym więc przykładzie zatrzymujemy w ilorazie dwa miejsca znaczące, gdyż dzielnik posiada 2 miejsca znaczące. Nie należy sądzić (podobnie jak w iloczynie), że błąd w wyniku jest mniejszy od 5 jednostek najniższego zachowanego miejsca.

Zmiany iloczynu i ilorazu

Zmiany iloczynu. Przypuśćmy, że iloczyn: $15 \times 17 \times \frac{2}{3}$ chcemy pomnożyć przez jakąś liczbę np. przez $2\frac{1}{2}$; zatem mamy obliczyć iloczyn: $2\frac{1}{2} \times (15 \times 17 \times \frac{2}{3})$.

Ponieważ w iloczynie możemy w dowolnym porządku działania wykonywać, więc $2\frac{1}{2} \times (15 \times 17 \times \frac{2}{3}) = (2\frac{1}{2} \times 15) \times 17 \times \frac{2}{3} = 15 \times (2\frac{1}{2} \times 17) \times \frac{2}{3} = 15 \times 17 \times (2\frac{1}{2} \times \frac{2}{3})$.

Zatem iloczyn mnożymy przez liczbę, mnożąc jeden czynnik (którykolwiek) przez tę liczbę.

Przypuśćmy, że iloczyn: $15 \times 17 \times \frac{2}{3}$ chcemy podzielić przez $2\frac{1}{2}$ t. j. $\frac{5}{2}$; mamy zatem obliczyć iloraz: $(15 \times 17 \times \frac{2}{3}) : \frac{5}{2}$.

Lecz $(15 \times 17 \times \frac{2}{3}) : \frac{5}{2} = (15 \times 17 \times \frac{2}{3}) \times \frac{2}{5} = (15 \times \frac{2}{5}) \times 17 \times \frac{2}{3}$.

Z uwagi na to, że: $15 \times \frac{2}{5} = 15 : \frac{5}{2}$, otrzymujemy:

$$(15 \times 17 \times \frac{2}{3}) : \frac{5}{2} = (15 : \frac{5}{2}) \times 17 \times \frac{2}{3}.$$

Podobnie postępując, otrzymujemy:

$$(15 \times 17 \times \frac{2}{3}) : \frac{5}{2} = 15 \times (17 : \frac{5}{2}) \times \frac{2}{3} = 15 \times 17 \times (\frac{2}{3} : \frac{5}{2}).$$

A więc iloczyn dzielimy przez liczbę, dzieląc jeden czynnik (którykolwiek) przez tę liczbę.

Uwaga. Z powyższego wynika, że jeżeli jakiś czynnik iloczynu pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez jakąś liczbę, to przez to cały iloczyn pomnożymy (wzgl. podzielimy) przez tę liczbę.

Zmiany ilorazu. Przypuśćmy, że iloraz: $5:6$ mamy pomnożyć przez 2. A więc mamy obliczyć: $(5:6) \times 2$.

$$\text{Zamieniając iloraz na ułamek, otrzymamy: } \frac{5}{6} \times 2 = \frac{5 \times 2}{6} = \frac{5}{6:2}.$$

$$\text{Zatem: } (5:6) \times 2 = (5 \times 2):6 = 5:(6:2).$$

Widzimy stąd, że iloraz mnożymy przez liczbę, mnożąc dzielną lub dzieląc dzielnik przez tę liczbę.

To samo zachodzi dla liczb ułamkowych. Mamy np. iloraz $\frac{3}{4}:\frac{5}{6}$ pomnożyć przez $\frac{2}{7}$. Otrzymamy: $(\frac{3}{4}:\frac{5}{6}) \cdot \frac{2}{7}$. Wykonując dzielenie w nawiasie, mamy: $\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{7} = (\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}) \times \frac{6}{5} = (\frac{3}{2} \times \frac{2}{7}) : \frac{5}{6}$. A więc mnożymy iloraz, mnożąc dzielną.

Mamy również:

$$\frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{6 \times 2}{5 \times 7} \right) = \frac{3}{4} : \left(\frac{5 \times 7}{6 \times 2} \right) = \frac{3}{4} : \left(\frac{5}{6} \times \frac{7}{2} \right) = \frac{3}{4} : \left(\frac{5}{6} : \frac{2}{7} \right).$$

A więc mnożymy iloraz, dzieląc dzielnik.

Podobnie przekonywamy się, że iloraz dzielimy przez liczbę, dzieląc dzielną lub mnożąc dzielnik przez tę liczbę.

Np. Mamy obliczyć: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) : \frac{2}{7}$. Wyrażenie powyższe wynosi: $(\frac{3}{4} : \frac{5}{6}) \times \frac{2}{7}$. Mamy teraz iloraz pomnożyć przez liczbę, zatem możemy mnożyć dzielną lub dzielić dzielnik.

Otrzymamy więc albo: $(\frac{3}{4} \times \frac{2}{7}) : \frac{5}{6}$ albo: $\frac{3}{4} : (\frac{5}{6} : \frac{2}{7})$.

Wyrażenia powyższe możemy również napisać w postaci:

$$(\frac{3}{4} : \frac{2}{7}) : \frac{5}{6} \quad \text{albo} \quad \frac{3}{4} : (\frac{5}{6} \times \frac{7}{2}).$$

Pierwsze wyrażenie wskazuje, że iloraz dzielimy przez liczbę, dzieląc dzielną, drugie zaś, że iloraz dzielimy, mnożąc dzielnik.

Zadania

1. W iloczynie $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{9}$ powiększ jeden z czynników: a) 3 razy, b) 5 razy, c) 13 razy; ile razy powiększy się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
2. W iloczynie a) $\frac{4}{11} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{13}{15}$, b) 4,2 · 3,1 · 1,6 powiększ jeden czynnik 2 razy, inny 7 razy; ile razy powiększy się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
3. W iloczynie $\frac{4}{11} \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{6}{17}$ powiększ jeden czynnik 3 razy, a drugi czynnik pomniejsz 5 razy; jak zmieni się iloczyn? Sprawdź rachunkiem!
4. W ilorazie $\frac{3}{4} : \frac{3}{11}$ powiększ dzielną a) 2 razy, b) 5 razy, c) $\frac{5}{3}$ razy; jak za każdym razem zmieni się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
5. W ilorazie $\frac{5}{13} : \frac{17}{11}$ powiększ dzielnik: a) 6 razy, b) $\frac{13}{11}$ razy, c) $\frac{3}{2}$ razy; jak za każdym razem zmieni się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
6. W ilorazie 4,2 : 0,8 powiększono dzielną 5 razy, dzielnik zaś zmniejszono 5 razy; jak zmienił się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
7. W ilorazie $\frac{7}{9} : \frac{23}{11}$ powiększono dzielną 5 razy, dzielnik zaś zmniejszono 8 razy; jak zmienił się iloraz? Sprawdź rachunkiem!
8. Pomnóż w prosty sposób przez a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $\frac{7}{11}$ iloczyn: $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{17}{11}$!
Np. $(\frac{5}{11} \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{19}) \cdot \frac{1}{5} = (\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{5}) \cdot \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{19} = \frac{4}{13} \cdot \frac{8}{19}$.
9. Pomnóż w prosty sposób przez a) $\frac{8}{3}$, b) $\frac{16}{5}$, c) $\frac{4}{9}$ iloczyn: 0,18 · 1,45. Np. $(2,1 \cdot 4,63) \cdot \frac{2}{3} = (2,1 \cdot \frac{2}{3}) \cdot 4,63 = 0,7 \cdot 4,63$.

10. Podziel w prosty sposób przez a) $\frac{9}{15}$, b) $\frac{7}{15}$, c) $\frac{10}{15}$ iloczyn: $\frac{10}{15} \cdot \frac{7}{15} \cdot \frac{9}{15}$.
11. Podziel w prosty sposób przez a) $\frac{4}{5}$, b) $\frac{3}{5}$, c) $\frac{5}{5}$ iloczyn: $2,16 \cdot 0,25$.

Ćwiczenia

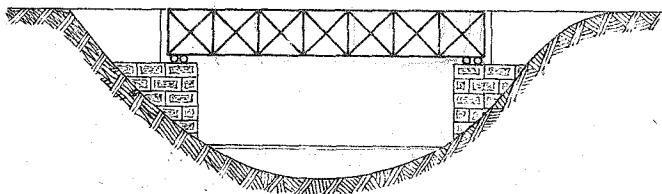
1. $\frac{5}{8}$ kg pewnego towaru kosztuje $\frac{1}{2}$ zł; ile kosztuje 1 kg tego towaru?
2. Ile kosztuje gram złota, jeśli $2\frac{1}{2}$ g złota kosztuje $14\frac{1}{2}$ zł?
3. Automobil przebiegł w $5\frac{1}{2}$ godziny 260 km; jaką drogę przebiegł w 1 godzinie?
4. Robotnik za $3\frac{1}{2}$ godziny pracy otrzymał $8\frac{1}{2}$ zł; ile płacono mu za 1 godzinę pracy?
5. $\frac{2}{5}$ sztuki sukna kosztuje 240 zł; ile kosztuje cała sztuka?
6. W ciągu $\frac{3}{5}$ godziny robotnik wykonał $\frac{2}{5}$ przyjętej pracy; w jakim czasie wykona całą pracę?
7. $\frac{3}{4}$ butelki octu kosztuje $\frac{6}{5}$ zł; ile kosztuje pełna butelka octu?
8. 12 l wina rozlano w butelki o pojemności $\frac{3}{4}$ l; ile butelek napełniono?
9. Ile razy odcinek $13\frac{1}{2}$ m jest dłuższy od odcinka $2\frac{1}{2}$ m?
10. Kilogram cukru kosztuje $1\frac{1}{2}$ zł; ile kg cukru otrzymamy za $6\frac{1}{2}$ zł?
11. Zegar przyspiesza dziennie o $2\frac{3}{4}$ minuty; po ilu dniach przyspieszy godzinę?
12. Ile kamizelek można uszyć ze sztuki 6 m sukna, jeśli na jedną kamizelkę potrzeba $\frac{3}{5}$ m sukna?
13. Metr ma około $1\frac{1}{4}$ łokcia; ile to jest metrów $4\frac{1}{2}$ łokcia?
14. Obwód koła u wozu wynosi $2\frac{2}{3}$ m; ile razy koło obróci się na drodze o długości $97\frac{3}{4}$ m?
15. Śruba wkręca się o $\frac{1}{4}$ mm za jednym obrotem; ile razy trzeba śrubę obrócić, aby wkręciła się o $3\frac{3}{4}$ mm?
16. Ogrodzenie ogrodu w kształcie prostokąta, którego jeden bok wynosi 58 m, kosztowało 988 zł, przyczem za 1 m ogrodzenia płacono 4,75 zł. Jak długi jest drugi bok?
17. Oblicz bok kwadratu, którego obwód wynosi: a) $21\frac{1}{4}$ cm, b) 15,48 dcm, c) $18\frac{1}{8}$ km!
18. Obwód kwadratu równa się obwodowi prostokąta o wymiarach 4,5 m i 6 m. Oblicz bok tego kwadratu! Rysunek w skali 1:100!
19. Oblicz obwód prostokąta o wymiarach 4 km i 5 km, a następnie obwody tych prostokątów, które przedstawiają jego plan w skali 1:10, 1:25, 1:50, 1:200, 1:500, 1:1000. Porównaj te obwody z obwodem danego prostokąta! Co zauważysz?

20. Pole w kształcie kwadratu można obejść w 1,7 minutach, przyjmując, że idzie się z prędkością 4,5 km na godzinę. Oblicz długość boku tego kwadratu!
21. Oblicz promień koła, którego obwód wynosi: a) 18,84 cm, b) 5 dcm, c) $2\frac{1}{2}$ m!
22. Obwód wielkiego koła u wozu wynosi 3 m. Gdy wóz porusza się, mniejsze koło wykonuje 4 obroty, a większe równocześnie 3 obroty: a) jaki jest obwód koła mniejszego? b) jaki jest jego promień?
23. Jaka jest wysokość prostokąta, w którym podstawa równa się: a) $3\frac{1}{2}$ cm, b) 4,5 dcm, c) $4\frac{1}{2}$ m, d) $\frac{1}{4}$ m, e) 2,4 m a którego pole wynosi: a) $17\frac{1}{2}$ cm², b) 14,4 dcm², c) $15\frac{9}{10}$ m², d) 0,7 m², e) 0,6 m²?
24. Zamieniono pole w kształcie prostokąta o wymiarach 156 m 75 m, w cenie 3,75 zł za 1 m², na pole w cenie 2,5 zł za 1 m²; ile pola na zamianę zyskano?
25. W ogrodzie w kształcie prostokąta, o polu 10,08 a, przeprowadzono równolegle do dłuższego boku drogę na 2,5 m szeroką, wskutek czego uprawna część ogrodu zmniejszyła się o 1,05 a; jakie były wymiary ogrodu?
26. Jak długi jest bok kwadratu, którego pole równa się polu prostokąta o wymiarach: a) 4 cm i 9 cm, b) 9 cm i 16 cm?
27. Dokoła ogrodu w kształcie prostokąta biegnie ścieżka 0,85 m szeroka. Pole tego placu (ogrodu wraz z ścieżką) wynosi 37,96 a, długość zaś 73 m; jakie jest pole tej ścieżki?
28. Ile wynosi podstawa równoległoboku, którego pole wynosi: a) $22\frac{1}{2}$ cm², b) 36,72 dcm², c) $43\frac{1}{2}$ m², wysokość zaś: a) $4\frac{1}{2}$ cm, b) 5,4 dcm, c) $5\frac{1}{2}$ m?
29. Ile wynosi wysokość równoległoboku, którego pole równa się: a) $6\frac{3}{4}$ dcm², b) 115,5 m², c) $85\frac{1}{2}$ km², d) 2,8 cm², e) $\frac{5}{8}$ m², podstawa zaś: a) 3 dcm, b) 15,4 m, c) $11\frac{1}{2}$ km, d) 3,5 cm, e) 1,6 m?
30. Przez pole w kształcie równoległoboku, o podstawie 85,6 m i wysokości 62,5 m, poprowadzono równolegle do podstawy drogę na 2,6 m szeroką, resztę zaś sprzedano po 55 zł za ar; jaką kwotę ze sprzedaży uzyskano?
31. Jaka jest wysokość trójkąta, którego pole wynosi: a) 1 m², b) 1 a, c) 1 ha, podstawa zaś: a) $1\frac{1}{2}$ m, b) 20,5 m, c) $175\frac{1}{2}$ m?
32. Pole w kształcie równoległoboku o podstawie 128 m i wysokości 85 m oceniono po 50 zł za 1 a. Pole to zamieniono na łąkę w kształcie trójkąta, licząc po 68 zł za jeden ar; jakie

- jest pole tej łąki? Ile wynosi podstawa, jeśli wysokość ma 100 m?
33. Pole trapezu wynosi: a) $39\frac{1}{8} \text{ cm}^2$, b) 0,388 ha, c) 1,815 a, boki zaś równoległe mają: a) 4 cm i $11\frac{1}{4} \text{ cm}$, b) 112,4 m i 81,6 m, c) $14\frac{1}{8} \text{ m}$ i $16\frac{1}{8} \text{ m}$; oblicz wysokość trapezu!
 34. Pole trapezu równoramiennego równa się 18,72 a, przyczem jeden z boków równoległych jest 2 razy większy od drugiego, wysokość zaś wynosi 48 m; oblicz długości boków równoległych! Rysunek w skali 1:1000!
 35. Pole w kształcie trapezu sprzedano za 5760 zł, licząc po 48 zł za 1 a; wiedząc, że wysokość trapezu wynosiła 80 m, jeden zaś z boków równoległych miał 135 m; oblicz długość drugiego boku równoległego!
 36. Obwód koła wynosi: a) 8 m, b) 14,5 dcm, c) $4\frac{2}{3} \text{ cm}$; oblicz jego pole!
 37. Pole koła o promieniu 3,4 cm równa się polu prostokąta o podstawie 8 cm; jaka jest wysokość tego prostokąta?
 38. Prostopadłościan, którego podstawa jest kwadratem o boku: a) 5 cm, b) 3,5 cm, ma pole: a) 130 cm^2 , b) $103,25 \text{ cm}^2$; jak wysoki jest ten prostopadłościan?
 39. Pole pobocznic walca wynosi: a) $15,7 \text{ dcm}^2$, b) 36,424 a, c) $35,325 \text{ m}^2$, wysokość zaś walca: a) 2,5 dcm, b) 4,5 m, c) $3\frac{1}{4} \text{ m}$; jaki jest promień podstawy walca?
 40. Powierzchnia walca wynosi: a) $125,6 \text{ cm}^2$, b) 357 dcm^2 , c) $486,7 \text{ m}^2$; promień zaś podstawy: a) 2 cm, b) $2\frac{1}{2} \text{ dcm}$, c) 5 m. Jaka jest wysokość tego walca?
 41. Pudełko w kształcie sześcianu ma krawędź: a) 16 cm, b) 27 cm; ile zmieści się w nim sześcianów o krawędzi: a) 2 cm, b) 3 cm?
 42. Jaka jest wysokość prostopadłościanu, którego objętość wynosi: a) 140 cm^3 , b) $33,12 \text{ dcm}^3$, c) $81\frac{3}{8} \text{ m}^3$, a którego podstawa ma: a) 40 cm^2 , b) $14,4 \text{ dcm}^2$, c) $19\frac{1}{4} \text{ m}^2$?
 43. Jak wysoką powinna być sala o długości 9 m i szerokości $4\frac{1}{2} \text{ m}$, jeśli ma pomieścić 48 uczniów, przyczem liczymy po 4 m^3 powietrza na 1 osobę?
 44. Kostka cukru ma wymiary 22 mm, 24 mm, 8 mm; oblicz ile kostek cukru przypada na 1 kg, wiedząc, że 1 cm^3 cukru waży 1,6 g. Jaką objętość zajmuje 5 kg cukru?
 45. Lampa gazowa zużywa 24 m^3 powietrza na godzinę, lampa naftowa 20 m^3 , świeca 6 m^3 , wreszcie człowiek przez oddychanie 7 m^3 . Pokój ma 4,8 m długości, 3,8 m szerokości a 3,4 m wysokości; a) w jakim czasie 5 osób zużyłoby całko-

- wicie powietrze w tym pokoju, gdyby nie było dopływu świeżego powietrza? b) w jakim czasie powietrze będzie zużyte, jeśli nadto pali się lampa gazowa lub naftowa, albo też świeca?
46. Prostopadłościan z miedzi, wrzucony do wody, stracił pozornie 235 g na swym ciężarze. Jaka była długość tego prostopadłościanu, jeśli jego podstawą był kwadrat o boku 5 cm? Ile waży 1 cm³ miedzi, jeśli ten prostopadłościan ważył w wodzie 1863,55 g?
47. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: a) 1080 cm³, b) 25 dcm³, c) 871 $\frac{1}{2}$ m³, podstawa zaś: a) 135 cm², b) 6,25 dcm², c) 5625 m²; jaka jest wysokość tego graniastosłupa?
48. Objętość graniastosłupa prostego wynosi: a) 14,7 cm³, b) 261 $\frac{3}{4}$ dcm³, c) 162,4 m³, wysokość zaś: a) 7,5 cm, b) 9 $\frac{1}{2}$ dcm, c) 8,5 m; jakie jest pole podstawy tego graniastosłupa?
49. Jaka jest wysokość walca, którego objętość wynosi: a) 60,68 cm³, b) 81,4 dcm³, c) 211,6 m³, a którego promień podstawy ma: a) 4 $\frac{1}{2}$ cm, b) 2,4 dcm, c) 3 $\frac{1}{2}$ m?
50. Do naczynia kształtu walca, w którym podstawa ma promień 6 cm, wiano wody, a następnie wrzucono prostopadłościan o wymiarach 5 cm, 6,24 cm, 8 cm; o ile wskutek tego podniósł się poziom wody w tem naczyniu?
51. Tunel prowadzący przez górę św. Gotarda w Alpach zbudowano w czasie od 4 lipca 1872 r. do 5 lutego 1880 r. Tunel ma 14,9 km długości, a koszty jego budowy wyniosły 102,8 milionów zł. Oblicz: a) koszty budowy 1 m tunelu, b) ile przeciętnie czasu potrzeba było, aby wybudować 1 m tunelu, c) ile czasu potrzebuje pociąg, aby przejechać przez tunel z prędkością 60 km na godz.?
52. Najszybszy pociąg w Europie jedzie na przestrzeni Paryż-Calais (298 km) z prędkością 93 km na 1 godz.; oblicz: a) ile m na 1 sek. przebiega ten pociąg, b) czas jazdy z Paryża do Calais.
53. Średnia prędkość parowca wynosi 23 mil morskich na godz. (1 mila morska = 1,852 km); jak długo jedzie parowiec z Gdańska do New Yorku (6800 km)?
54. Odległość bieguna od równika mierzona na południku wynosi 90°, albo 10 000 km. Z Warszawy, której szerokość geograficzna wynosi 52° 13' 5", wystartował lotnik, lecąc wzdłuż południka przeciętnie z prędkością 180 km na godz.; po jakim czasie przyleci nad biegun północny?
55. Przez rzeczkę o szerokości 16 m poprowadzono most o rozpiętości 21 m. Belka kwadratowa żelaznej konstrukcji (kratow-

nica) składa się (rys. 8) z 7 kwadratów o boku 3 m; a) oblicz koszty budowy tego mostu, jeśli 1 m bieżący kratownicy kosztuje 1300 zł, a $\frac{2}{3}$ kosztów budowy całego mostu przypada



Rys. 8.

na obie kratownice; b) oblicz ciężar obu kratownic, jeśli ciężar 1 m bieżącego kratownicy wynosi 2,75 t; c) podaj rysunek w skali 1 : 200 kratownicy o rozpiętości 27 m, jeśli kratownica składa się z 9 kwadratów.

Obliczanie wyrażeń

Porządek wykonywania działań

Jeżeli mamy obliczyć wartość jakiegoś wyrażenia, jak np.: $8 + 4 \cdot 5$, to nie jest rzeczą obojętną, w jakim porządku będziemy wykonywali naznaczone działania. Jeżeli najpierw wykonamy dodawanie, a potem mnożenie, to rachunek przedstawi się następująco: $8 + 4 = 12$, $12 \cdot 5 = 60$.

Wykonajmy teraz najpierw mnożenie, a potem dodawanie, a więc: $4 \cdot 5 = 20$, $8 + 20 = 28$.

Widzimy, że tym razem otrzymaliśmy inny wynik, niż poprzednio. Potrzebne więc są reguły, w jakim porządku należy wykonywać działania.

Reguły te są następujące:

I. Jeżeli w wyrażeniu występują tylko znaki dodawania i odejmowania, to wartość takiego wyrażenia obliczamy, wykonując pokolei naznaczone działania.

Np. $16 - 5 - 3 + 7 - 2$.

Obliczamy: $16 - 5 = 11$, $11 - 3 = 8$, $8 + 7 = 15$, $15 - 2 = 13$.

A więc wartość naszego wyrażenia jest 13.

Zadania

1. Oblicz wartość następujących wyrażeń:

- a) $16 - 5 + 3 - 1$, b) $8 - 2 - 3 + 5 - 4$, c) $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$.
d) $5 - 4 - 1 + 3$, e) $7 - 1 + 8 - 8$, f) $2 - 1,7 + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}$.

II. Jeżeli w wyrażeniu (oprócz dodawania i odejmowania) występuje mnożenie, to wykonujemy najpierw wszystkie naznaczone mnożenia, a potem pokolei dodawania i odejmowania.

Np. a) $3 + 4 \cdot 5$.

Obliczamy: $4 \cdot 5 = 20$; otrzymujemy więc wyrażenie $3 + 20$; wartością jego jest 23.

b) $3 \cdot 5 - 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4$.

Obliczamy: $3 \cdot 5 = 15$, $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$, $5 \cdot 4 = 20$.

Wstawiając zamiast iloczynów ich wartości, otrzymujemy wyrażenie: $15 - 12 + 20$.

Po obliczeniu otrzymujemy jako wartość tego wyrażenia: 23.

c) $10 - 2 \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 10 - 6 + 10 = 14$.

Zadania

1. Oblicz wartości następujących wyrażen:

a) $3 \cdot 4 - 2$; $8 + 2 \cdot 3$; $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}$; $2,1 + \frac{1}{3} \cdot 4$;

b) $3,5 - 2,1 \cdot 1,3$; $\frac{3}{4} - 0,3 \cdot \frac{1}{8}$; $2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{4}$;

c) $30 - 2 \cdot 3 \cdot 4$; $2 + 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 5$; $3,6 - 2 \cdot 1,3 \cdot 0,4$;

d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$; $4,5 - 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{2}$.

2. Oblicz wartości następujących wyrażen:

a) $2 \cdot 3 + 4 \cdot 5$; $4 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 3$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$;

b) $4 \cdot 7 - 3 \cdot 0,2 + 5 \cdot \frac{1}{2}$; $18 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7$; $4 \cdot 2 - 3 + 2 \cdot 5 \cdot 2$;

c) $5 \cdot 6 - 3 \cdot 2 + 6 - 7 \cdot 2$; $20 + 3 \cdot 7 - 5 \cdot 4 + 3$;

d) $80 - 2 \cdot 4 - 3 \cdot 5 - 8$; $\frac{15}{2} - \frac{1}{4} \cdot 3 - \frac{1}{8} \cdot 5 + \frac{3}{8}$;

e) $40 \cdot 2,3 + 18 - 4,7 \cdot 5 - 1,2 \cdot 3$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + 5 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

III. Jeżeli w wyrażeniu występują także dzielenia, to wykonuje się najpierw mnożenia, potem dzielenia, a wkońcu pokolei dodawania i odejmowania.

Np. a) $4 - 15 : 5$ obliczamy: $15 : 5 = 3$, $4 - 3 = 1$;

b) $2 \cdot 5 - 8 : 4 + 8 \cdot \frac{5}{2} = 10 - 2 + 20 = 28$.

Zadania

1. Oblicz wartość następujących wyrażen:

a) $8 : 4 - 2$; $6 + 12 : 3$; $8 - 5 + 4 : 2$; $2 \cdot \frac{3}{2} - 6 : 3$;

b) $2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 : 2$; $4 \cdot 6 : 12 + 24 : 3$; $2 \cdot 6 \cdot 8 : 3 - 3 \cdot 10 : 2 : 5$;

c) $2 \cdot 3 + 8 : 4 - 2 \cdot 10 : 5$; $5 \cdot 8 : 4 + 4 \cdot 12 : 3 - 2 \cdot 10 : 5$;

d) $5 - 4 : 2 + 3 \cdot 2 : 3 + 2 \cdot 4$; $5 \cdot 3 - 4 \cdot 5 : 8 + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{10} - 3$.

2. Oblicz wartość następujących wyrażen:

a) $100 - 8 - 2 \cdot 16 : 4 + 5 \cdot 3$; $8 \cdot 5 \cdot 6 : 10 - 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} - 2$;

- b) $\frac{3}{4} + 2.4:6 + 2.\frac{7}{8}$; $15 - 7:2 - 2.\frac{5}{8} + 4.7$;
 c) $\frac{3}{2}.\frac{2}{3} + 2.\frac{3}{4}:2 - \frac{1}{8} + 4$; $5 + 2.\frac{4}{5}.5 + 7:2 - 8:3$;
 d) $\frac{3}{4} + \frac{5}{2}.6:2 - \frac{1}{6}.3:5 + 7.2 - 4$; $0.8:2 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3}.\frac{6}{5}:2$.

IV. Jeżeli w wyrażeniu występuje nadto potęgowanie, to najpierw obliczamy potęgi, następnie wykonujemy mnożenia, potem dzielenia, a wreszcie pokolei dodawania i odejmowania.

Np. a) $8 + 3^2 = 8 + 9 = 17$;

b) $4 + 2.5^2 = 4 + 2.25 = 4 + 50 = 54$;

c) $2.3^2 - 3.5 + 4^2.3 = 2.9 - 3.5 + 16.3 = 18 - 15 + 48 = 51$;

d) $18:3^2 + 3^2.2 = 18:9 + 9.2 = 2 + 18 = 20$.

Przy obliczaniu więc wartości wyrażeń należy pamiętać następującą kolejność działań:

I. Potęgowanie.

II. Mnożenie.

III. Dzielenie.

IV. Dodawanie i odejmowanie pokolei.

Gdybyśmy inaczej obliczali wartości wyrażeń, to moglibyśmy otrzymać wyniki błędne.

Uwaga: Wartości ułamków jak np. $\frac{3+4.5}{2+3.5}$ obliczamy, obliczając osobno wartość wyrażenia, które jest licznikiem i osobno wartość wyrażenia, które jest mianownikiem, a następnie dzieląc wyniki przez siebie.

Liczymy zatem:

$$3 + 4.5 = 3 + 20 = 23; \quad 2 + 3.5 = 2 + 15 = 17,$$

a więc
$$\frac{3+4.5}{2+3.5} = \frac{23}{17}.$$

Jeżeli w wyrażeniach występują takie ułamki, to najpierw obliczamy wartości tych ułamków, a następnie wykonujemy działania wedle reguły działań.

Np. $4.5 + \frac{1+5.7}{14-2} = 4.5 + \frac{1+35}{12} = 4.5 + \frac{36}{12} = 23.$

Zadania.

1. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

a) $5^2 + 7$, $16 - 3^2$, $6^2 - 5$, $1 + 2^3$, $4^3 - 18$;

b) $5 + 3.2^2$, $5.2^3 - 8$, $30 - 4.2^2$, $75 - 2.3^3$;

c) $2^2.3 + 4.5 + 8.3^2$, $16 - 2.3 + 5.2^3$;

d) $2.7 - \frac{1}{3} + 4^2.7$, $3^3.5 - 2.4^2 + 5.7 + \frac{1}{2}$;

$$e) \frac{16}{2^2} + 4 \cdot 7, \quad \frac{15}{3} + 2 \cdot 4 + \frac{5^2}{3}, \quad 7^2 \cdot 5 + \frac{4^2}{2} - 4 \cdot 6;$$

$$f) \frac{125}{5^2} - 8 \cdot \frac{3}{5} + 3^2 \cdot \frac{40}{5} + 3,$$

$$\frac{3^2}{2^2} \cdot 8 - 2 \cdot \frac{5}{2} + 3^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{7}{6} - 2 \cdot 5 + 4.$$

2. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

$$a) 100 - 3 \cdot \frac{4^2}{12} + 8 \cdot 6, \quad 45 + \frac{3}{4^2} - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 7;$$

$$b) 40 \cdot 2^2 + 2 \cdot 10 - \frac{4}{5^2} - \frac{3^2}{2}, \quad \frac{12}{4} + 2^3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - \frac{2^4}{4};$$

$$c) 5 \cdot 2 \cdot 10 - \frac{2^3}{4} - \frac{27}{3^2} + 5 \cdot 4, \quad 3 \cdot \frac{8}{2^2} + 4 \cdot 5 + 30 \cdot 2^2 - 3 \cdot 7;$$

$$d) 2 \cdot 8 \cdot \frac{14}{2^4} + 5 - 7 \cdot 2 + \frac{24}{3}, \quad 18 + 3 \cdot 9 \cdot \frac{5}{3^3} + \frac{7}{2} - \frac{2^4}{3}.$$

3. Oblicz wartości następujących wyrażeń:

$$a) 3 + \frac{5-1}{8+3}, \quad 2 + \frac{5+4}{8-3}, \quad 16 + \frac{2 \cdot 3 + 5}{4-1}, \quad 20 - \frac{7+4 \cdot 5}{9+6 \cdot 8};$$

$$b) 5 + \frac{4+5 \cdot 7}{8 \cdot 3 + 2}, \quad \frac{6 \cdot 9 - 8}{40 - 2 \cdot 3} + 11, \quad 12 - \frac{4 \cdot 11 - 3 \cdot 7}{8 \cdot 15 - 6 \cdot 7};$$

$$c) \frac{4+2 \cdot 5}{8-3} \cdot 2, \quad 3 \cdot \frac{7 \cdot 8 - 2 \cdot 3}{5 \cdot 6 - 14} + 1, \quad 18 - 2 \cdot \frac{3 \cdot 4 - 2 \cdot 5}{8 - 2 \cdot 3}.$$

Nawiasy

Obliczanie wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach.

Jeżeli chcemy, aby działania wykonano w innym porządku, niż podaje reguła, wówczas używamy nawiasów.

Zwykle używa się następujących nawiasów:

$$(\quad) \quad [\quad] \quad \{ \quad \}$$

Powyższe rodzaje nawiasów mogą być rozmaitej wielkości.

Nauczymy się teraz obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Rozróżniamy dwa przypadki.

1. W wyrażeniu: $3 \cdot (4 + 2) + 7 \cdot (5 - 3)$ występują nawiasy, które nie zawierają wewnątrz innych nawiasów. Obliczamy wartości takich wyrażeń, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w nawiasach (opuszczając nawiasy), a następnie wykonując działania wedle reguły działań.

$$A \text{ więc: } 3 \cdot (4 + 2) + 7 \cdot (5 - 3) = 3 \cdot 6 + 7 \cdot 2 = 18 + 14 = 32.$$

Podobnie: $(5 + 3) \cdot (5 - 3) + 4 \cdot (\frac{3}{2} + 1) = 8 \cdot 2 + 4 \cdot (4 + 1) = 16 + 20 = 36.$

2. W wyrażeniu: $5 \cdot (10 - 7) + [3 \cdot 4 + 5 \cdot (8 - 2)]$

nawias graniasty zawiera nawias okrągły. Wartości takich wyrażeń (w których występują nawiasy, zawierające w swoim wnętrzu inne nawiasy) obliczamy, obliczając najpierw wartości wyrażeń zawartych w tych nawiasach, w których wnętrzu nie ma już innych nawiasów.

Obliczymy więc najpierw wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach: $(10 - 7)$ i $(8 - 2)$.

Otrzymamy zatem: $5 \cdot 3 + [3 \cdot 4 + 5 \cdot 6]$.

Wartość tego wyrażenia obliczamy, jak w przypadku 1.

A więc: $5 \cdot 3 + [3 \cdot 4 + 5 \cdot 6] = 5 \cdot 3 + [12 + 30] = 5 \cdot 3 + 42 = 15 + 42 = 57.$

Podobnie: $11 + \{[8 + (6 - 2)] - 5\} = 11 + \{[8 + 4] - 5\} = 11 + \{12 - 5\} = 11 + 7 = 18.$

Uwaga. Jeżeli chcemy w wyrażeniu zastąpić znak kreski ułamkowej znakiem dwóch kropek, należy uważać, aby porządek działań w myśl przyjętych reguł był zachowany, co zawsze da się zrobić przez użycie nawiasów.

Np. $\frac{3+7}{4 \cdot 5} = (3+7):(4 \cdot 5); 2 + \frac{5+6}{8} = 2 + [(5+6):8].$

Zadania

1. Oblicz wartości wyrażeń:

- $(2 + 3) \cdot (4 + 7), (9 - 2) \cdot (8 + 3), (10 - 3) \cdot (7 - 4);$
- $(\frac{1}{2} + 1) \cdot (\frac{3}{2} + 2), (\frac{4}{2} - 1) \cdot (2 + \frac{1}{2}), (3\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \cdot (6 - \frac{2}{2});$
- $(3 + 1) \cdot (5 - 2) + 2 \cdot (5 \cdot 7), (8 - 3) \cdot (6 + 7) - 3 \cdot (8 : 4);$
- $5 \cdot (8 \cdot 6) - (2 + 1) \cdot (7 - 5), 10 \cdot (12 : 4) - (4 - 1) \cdot (5 - 3).$

2. Oblicz wartości wyrażeń:

- $3 \cdot 2 + [5 + 4 \cdot (7 + 1)], 2 \cdot (16 - 4) + [20 - 2 \cdot (3 - 1)];$
- $35 \cdot (4 - 1) - [8 - (4 + 1)], 15 \cdot (3 + 7) - [11 - (5 - 1)];$
- $[17 + (3 + 1) \cdot 2] \cdot 4, [15 - (7 - 5)] \cdot 2 + 2 \cdot (4 - 1);$
- $3 \cdot (4 \cdot 2) - [(2 + 4) : 3], [(7 + 1) : 2] : 3.$

3. Oblicz wartości wyrażeń:

- $18 - \{[10 - (4 + 1)] : 2 + 6\}, \{[20 - 8 - 6] \cdot 3 - 5\} \cdot 4;$
- $\{[7 \cdot (5 : 2)] \cdot 4 - 1\} \cdot 2, 6 \cdot (8 - 1) - \{[3 \cdot (5 - 1) + 1] \cdot 2 - 1\};$
- $\{20 - [15 - (8 + 4)]\} : 5, \{[(2 + 1) \cdot 3 + 4] \cdot 5\} : 3;$
- $[(4 \cdot 7) : 3 - 2] \cdot 5 - \{[14 - (7 + 5)] \cdot 3 - 1\}.$

4. Oblicz wartości wyrażeń:

$$a) \frac{3 + (4 - 1) \cdot 5}{18 - (6 - 4) \cdot 3};$$

$$b) \frac{[4 + (7 + 2) \cdot 3] \cdot 4}{46 - [(18 - 5) \cdot 3 - 1]};$$

$$c) \frac{[17 - (4 - 1)] \cdot 2 + 5}{12 - [(0,2 + 0,8) \cdot 3 - 1]};$$

$$d) \frac{11 - \{[(3 + 1) - 7] \cdot 2 + 1\}}{[(6 - 4) \cdot 5 + 1] \cdot 3 - (2 \cdot 5)};$$

$$e) \frac{\{30 - [18 - (2 + 5)]\} \cdot 4}{[18 + (6 + 1) \cdot 3] \cdot 15};$$

$$f) \frac{[8 - (3 - 1)] \cdot 2 - [5 - (3 + 1)]}{5 \cdot [8 - (2 + 5)] - [(4 + 1) \cdot 2 - 8]}.$$

5. Oblicz wartości wyrażeń:

$$a) 5 + \frac{3 \cdot 7 + 1}{5 \cdot 6 - 2} - (4 - 1), \quad \frac{3 + (4 - 1) \cdot 5}{2 \cdot 5 - 1} + 18 - [9 - (5 + 1)];$$

$$b) 7 : 3 + \frac{4 - (3 - 1)}{5 - (4 - 2)}, \quad 20 - \left[\frac{(5 + 1) \cdot 4 - 2}{(7 - 2) \cdot 3 + 5} + 2 \right];$$

$$c) 16 + \frac{15 - [4 - (3 - 1)]}{4 + (6 - 2) \cdot 3} - 3, \\ \frac{[(8 - 3) \cdot 4 - 2] \cdot 5 - 20}{[15 - (4 + 1)] \cdot 2 + 1} - [(6 - 5) : 7].$$

Używanie nawiasów

W poprzednim ustępie nauczyliśmy się obliczać wartości wyrażeń, w których występują nawiasy. Zajmiemy się teraz zadaniem:

Ktoś poda nam liczby i działania, jakie na tych liczbach mamy wykonać; jak zapisać to przy pomocy nawiasów?

Przykład 1. Od 8 odejmij sumę liczb 2 i 3.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 2 i 3 w nawiasie: $(2 + 3)$, a następnie różnicę: $8 - (2 + 3)$.

Przykład 2. Sumę liczb 4 i 5 pomnóż przez 7.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 4 i 5 w nawiasie: $(4 + 5)$, a następnie iloczyn: $(4 + 5) \cdot 7$.

Przykład 3. Sumę liczb 8 i 5 pomnóż przez różnicę liczb 7 i 4.

Rozwiązanie: Piszemy sumę liczb 8 i 5 w nawiasie: $(8 + 5)$, następnie różnicę liczb 7 i 4 w nawiasie: $(7 - 4)$, wreszcie iloczyn: $(8 + 5) \cdot (7 - 4)$.

Przykład 4. Sumę liczb 2 i $3\frac{1}{2}$ odejmij od 8, a otrzymany wynik pomnóż przez 5.

Rozwiązanie: Piszemy najpierw: $(2 + 3\frac{1}{2})$, a następnie: $[8 - (2 + 3\frac{1}{2})]$, wreszcie: $[8 - (2 + 3\frac{1}{2})] \cdot 5$.

Uwaga. Do liczby 2 dodaj iloczyn liczb 3 i 4.

Rozwiązanie: Piszemy najpierw iloczyn: $(3 \cdot 4)$, a następnie sumę: $2 + (3 \cdot 4)$.

Wyrażenie to napiszemy prościej, opuszczając nawias: $2 + 3 \cdot 4$.

Wiemy bowiem, że wartość wyrażenia oblicza się, wykonując najpierw mnożenia, a potem dodawania. W układaniu wyrażień lepiej jest jednak na początku dawać i zbyteczne nawiasy. Zbyteczny bowiem nawias nie szkodzi, brak nawiasu potrzebnego jest natomiast błędem i zmienia wartość wyrażenia.

Zadania

1. W następujących zadaniach zaznacz nawiasami porządek, w którym działania masz wykonać i oblicz wartości otrzymanych wyrażień:
 - a) do liczby 5 dodać sumę liczb 3 i 4;
 - b) od liczby 8 odjąć sumę liczb 2 i 3;
 - c) do liczby 6 dodać różnicę liczb 7 i 2;
 - d) od liczby 10 odjąć różnicę liczb 6 i 4.
2.
 - a) sumę liczb 3 i 7 pomnóż przez 4;
 - b) pomnóż 5 przez sumę liczb 10 i 4;
 - c) utwórz iloczyn sumy liczb 8 i 7 przez liczbę 9;
 - d) różnicę liczb 10 i 8 pomnóż przez 4;
 - e) podziel sumę liczb 11 i 4 przez liczbę 3;
 - f) utwórz iloraz różnicy liczb 20 i 8 przez 5.
3.
 - a) sumę liczb 2 i 3 pomnóż przez sumę liczb 4 i 1;
 - b) sumę liczb 8 i 11 pomnóż przez różnicę liczb 10 i 3;
 - c) różnicę liczb 6 i 2 pomnóż przez sumę liczb 2 i 7;
 - d) utwórz iloczyn różnicy liczb 18 i 12 przez różnicę liczb 10 i 4.
4.
 - a) do 8 dodaj sumę liczb 3 i 11, a wynik pomnóż przez 2;
 - b) do 14 dodaj różnicę liczb 7 i 1, a wynik pomnóż przez 4;
 - c) od 18 odejmij sumę liczb 3 i 5, a wynik pomnóż przez 11;
 - d) od 24 odejmij różnicę liczb 13 i 9, a wynik podziel przez 5.
5. Jaką liczbę otrzymasz, jeśli do 5 dodasz 2, wynik pomnożysz przez 3 i wreszcie dodasz 6?
6. Jaki wynik otrzymasz, jeśli od 7 odejmiesz 4, wynik podzielisz przez 3 i wreszcie odejmiesz 1?
7. Dodaj do iloczynu liczby 5 przez sumę liczb 7 i 9 iloczyn liczby 4 przez różnicę liczb 10 i 8.
8. Do iloczynu liczby 7 przez sumę liczb 4 i 8 dodaj 9 i otrzymany wynik pomnóż przez 5.
9. Do ilorazu liczby 10 przez różnicę liczb 8 i 6 dodaj 4 i wynik pomnóż przez 11.
10. Pomnóż sumę liczb 5 i 7 przez różnicę liczb 10 i 6, do wyniku dodaj 3, a następnie wszystko podziel przez 4.

11. Od iloczynu sumy liczb 8 i 2 przez ich różnicę odejmij 5 i wynik pomnóż przez sumę liczb 2 i 3.
12. Do iloczynu sumy liczb 3 i 1 przez 2 dodaj 1, wynik pomnóż przez 4, dodaj znowu 1 i wynik pomnóż przez 5.
13. Od ilorazu sumy liczb 8 i 3 przez 5 odejmij 1, wynik pomnóż przez 2, a następnie podziel przez 3.
14. Od iloczynu różnicy liczb 8 i 5 przez 2 odejmij 1, wynik pomnóż przez 3, odejmij znowu 1 i wynik pomnóż przez 4.
15. Obierz jakąś liczbę, np. 17, dodaj do niej 11, wynik pomnóż przez 2 i od tego iloczynu odejmij 20. To, co otrzymasz pomnóż przez 5, następnie odejmij iloczyn obranej liczby (17) przez 10, a na wynik otrzymasz 10.

Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

16. Obierz jakąś liczbę, np. 21, pomnóż ją przez 15, do wyniku dodaj 60 i to, co otrzymasz podziel przez 3. Pomnóż teraz obraną liczbę (21) przez 5 i wynik ten odejmij od poprzednio otrzymanej liczby. Ostateczny wynik będzie 20.

Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

17. Obierz dowolną liczbę, np. 14, podziel ją przez 2, do wyniku dodaj 7, a to, co otrzymasz, pomnóż przez 8, od wyniku odejmij 12, następnie podziel przez 4 i znowu odejmij 11. Otrzymasz na wynik obraną liczbę (14).

Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

18. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 18, pomnóż ją przez 2, do wyniku dodaj 1, to, co otrzymasz pomnóż przez 5 i dodaj jeszcze 3; jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (18).

Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

19. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 23, dodaj do niej 2, wynik pomnóż przez 3, a od tego, co otrzymasz, odejmij 4, pomnóż następnie przez 3 i dodaj wkońcu obraną liczbę (23); jeśli w wyniku odrzucisz cyfrę jednostek, otrzymasz obraną liczbę (23). Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

20. Obierz dowolną liczbę naturalną, np. 19, pomnóż ją przez 5, do wyniku dodaj 2, to, co otrzymasz, pomnóż przez 4, do wyniku dodaj 3, następnie pomnóż przez 5 i wkońcu dodaj 7; jeśli w wyniku odrzucisz cyfry jednostek i dziesiątek, otrzymasz obraną liczbę (19).

Powtórz to zadanie, obierając inną liczbę!

21. Pamiętając o porządku, w jakim działania należy wykonywać, opuść w następujących wyrażeniach zbędne nawiasy:

- a) $(2 + 3) + 5$, $[(4 - 1) + 3] + 1$, $(5 \cdot 4) + 1$, $6 + (4 \cdot 3)$;
 b) $1 + (6 : 2)$, $(2 \cdot 5) + (7 - 3) \cdot 2$, $3 \cdot (2^2) + 4$, $(3 \cdot 2)^2 + 4$;
 c) $(7 - 4) + (3 + 2)$, $(6 + 8) - (4 + 5)$, $2 + (4 \cdot 6) : 3$,
 $[2 + (4 \cdot 6)] : 3$;
 d) $\{[(5 + 2) + 3] + 1\} + 2$, $(13 + 5) - \{[(8 - 3) - (4 - 2)] + 6\}$,
 $\{[(4 \cdot 6) + 8] : 8\} \cdot 3 - 1$.

Plan zadania

Rozwiązując jakieś zadanie, nie zawsze wykonujemy od razu działania konieczne do rozwiązania; czasami naznaczamy je tylko przy pomocy nawiasów, czyli tworzymy t. zw. plan zadania.

Przykład 1. Z dwóch miast wyszli naprzeciw siebie równocześnie dwaj posłańcy. Jeden szedł z prędkością 6 km na godz., drugi z prędkością 7 km na godz.; spotkali się po 4 godzinach. Jaka jest odległość tych miast od siebie?

Rozwiązanie: Pierwszy posłaniec przeszedł w 4 godzinach 4.6 km, drugi w tym samym czasie 4.7 km. Odległość więc obu miast wynosi w km: $4 \cdot 6 + 4 \cdot 7$.

Otrzymaliśmy więc plan zadania, wskazujący, jakie działania należy wykonać.

Przykład 2. Ojciec zarabiał dziennie 12 zł, syn 8 zł, na utrzymanie zaś domu wydawano dziennie 10 zł; ile zaoszczędzono w ciągu 6 dni?

Rozwiązanie: Dziennie zaoszczędzano zł: $(12 + 8 - 10)$, zatem w ciągu 6 dni zaoszczędzono zł: $6 \cdot (12 + 8 - 10)$.

Zadania

- Balon wzniósł się na wysokość 3600 m, potem opadł o 350 m, następnie wzniósł się o 450 m i znowu opadł o 640 m: na jakiej wysokości znajduje się balon?
- Dwaj wspólnicy rozdzielili zysk 8540 zł w ten sposób, że pierwszy otrzymał 4935 zł, a drugi resztę; o ile więcej otrzymał pierwszy wspólnik, niż drugi?
- Kupiec sprzedał w 3 dniach $163\frac{1}{2}$ kg herbaty. W pierwszym dniu sprzedał $57\frac{1}{4}$ kg, w drugim o $3\frac{1}{2}$ kg mniej, a w trzecim resztę; o ile więcej kg sprzedał w pierwszym dniu, niż w trzecim?
- Właściciel trzech kamienic miał z jednej kamienicy dochód roczny 5600 zł, z drugiej o 1200 zł więcej, a z trzeciej o 4300 zł

- mniej niż z obu pierwszych razem; ile wynosił jego roczny dochód z tych trzech kamienic?
5. Kwotę 8316 zł rozdzielono między 4 osoby w ten sposób, że pierwsza otrzymała $\frac{2}{7}$ tej kwoty, druga $\frac{3}{11}$, trzecia $\frac{8}{27}$, a czwarta resztę; ile otrzymała czwarta osoba?
 6. Kupiec miał 600 zł gotówki i sprzedał 35 kg towaru po 8 zł za 1 kg. Drugi zaś kupiec miał 400 zł gotówki i sprzedał jednego towaru 18 kg po 5 zł za 1 kg, a drugiego 20 kg po 6 zł za 1 kg; o ile pierwszy kupiec miał tego dnia więcej gotówki, niż drugi?
 7. Ktoś posiadał narożną parcelę w kształcie prostokąta o wymiarach 26 m długości i 19 m szerokości. Wskutek regulacji miasta stracił 3 m na długości i 2 m na szerokości. Ile stracił pieniędzy, jeśli mógł przedtem sprzedać tę parcelę po 1000 zł za 1 ar, a miasto zapłaciło mu za zabrany grunt po 600 zł za 1 ar?
 8. Kantor wymiany kupił 1500 dolarów po 6 zł 15 gr. Z tego sprzedał 450 dol. po 6 zł 40 gr, potem 620 dol. po 6 zł 45 gr, a gdy wkońcu sprzedał resztę, zysk z całej transakcji wyniósł 268 zł; ile płacono mu za dolara, gdy sprzedawał resztę?
 9. Do naczynia o pojemności 45 l rura dopływowa dostarcza $6\frac{1}{2}$ l wody w 1 minucie, rura zaś odpływowa odprowadza $2\frac{1}{2}$ l wody w 1 minucie; w jakim czasie napełni się to naczynie, jeśli obie rury będą równocześnie otwarte?
 10. a) Z dwóch miast wyszły naprzeciw siebie dwa pociągi, jeden z prędkością 27 km na godzinę, drugi zaś z prędkością 45 km na godzinę. Po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny pociągi te były odległe od siebie o 17 km. Jaka jest odległość obu miast?

Plan zadania: W ciągu 1 godziny pociągi zbliżyły się do siebie o $(27 + 45)$ kilometrów, a zatem po upływie $2\frac{1}{2}$ godziny zrobiły drogę $2\frac{1}{2} \cdot (27 + 45)$ kilometrów. Ponieważ wówczas ich odległość wynosiła 17 km, więc odległość obu miast wynosiła: $2\frac{1}{2} \cdot (27 + 45) + 17 = 197$ kilometrów.

b) Z Pilawy, odległej o 67 km od Warszawy, wyszedł pociąg towarowy w kierunku Lwowa, robiąc przeciętnie 35 km na godzinę, a w 2 godziny później w tymże kierunku pociąg pospieszny z Warszawy, robiąc 60 km na godzinę. Ile czasu potrzebuje pociąg pospieszny, aby dogonić pociąg towarowy?

Odp.: $(67 + 35 \cdot 2) : (60 - 35)$ godzin.

c) Z dwóch miast odległych o 840 km wyszły naprzeciw siebie 2 pociągi. Jeden przebyłby całą drogę w 12 godzinach, drugi

w 15 godzinach. Jaka będzie odległość między pociągami po upływie $4\frac{1}{2}$ godziny?

Odp.: $840 - (840 : 12 + 840 : 15) \cdot 4\frac{1}{2}$ kilometrów.

d) Z Warszawy wyszedł do Skierniewic pociąg pospieszny, robiący 55 km na godzinę, a jednocześnie ze Skierniewic do Warszawy wyszedł pociąg, robiący 45 km na godzinę. Obliczyć, w jakiej odległości od Warszawy pociągi te spotkają się, jeśli odległość Skierniewic od Warszawy wynosi 60 km.

Odp.: $55 \cdot [60 : (55 + 45)]$ kilometrów.

11. Kupiec otrzymał 3 paczki towaru: pierwsza ważyła 24,5 kg, druga o 2,4 kg mniej, a trzecia o 3,6 kg mniej, niż druga. Pierwsza paczka zawierała towar w cenie 15 zł za 1 kg, druga w cenie 10,5 zł za 1 kg, a trzecia w cenie 12,4 zł za 1 kg; ile kupiec zarobił, jeśli cały ten towar sprzedał za 980 zł?
12. Maszyna parowa, pracując przez 12 dni po 11 godzin dziennie, zużyła 840 t węgla. Wskutek ulepszenia konstrukcji maszyny zużyto w ciągu 36 godzin przy tej samej wydajności pracy 2,88 t węgla; ile wskutek ulepszenia konstrukcji maszyny zaoszczędzono pieniędzy w ciągu roku, jeżeli było 315 dni pracy (po 11 godz. dziennie), przyczem za 1 t węgla płacono 45 zł?

Znakowanie literowe

Określenia

1. Bok kwadratu ma 5 cm; oblicz obwód!

Obwód kwadratu wynosi w cm: 4.5.

Podobnie, jeżeli bok kwadratu ma 6 cm, 7 cm, 8 cm i t. d., wówczas obwód wynosi w cm odpowiednio: 4.6, 4.7, 4.8 i t. d.

Gdybyśmy przez O oznaczyli liczbę mierzącą obwód w cm, zaś przez b liczbę mierzącą bok w cm, to moglibyśmy napisać:
 $O = 4 \cdot b$.

Wzór powyższy wyraża krótko i przejrzystie następującą ogólną regułę:

Obwód kwadratu w cm otrzymamy, mnożąc przez 4 liczbę mierzącą bok w cm.

W powyższym wzorze możemy za b podstawiać rozmaite liczby, zależnie od długości boku kwadratu; za każdym razem otrzymamy jego obwód.

2. Robotnik zarabia dziennie $7\frac{1}{2}$ zł; ile zarobi w ciągu 3, 4, 5, 8 dni? Zarobek jego w zł wynosi odpowiednio:
 $3 \cdot 7\frac{1}{2}$, $4 \cdot 7\frac{1}{2}$, $5 \cdot 7\frac{1}{2}$, $8 \cdot 7\frac{1}{2}$.
 Jeżeli przez z oznaczymy zarobek w zł, zaś przez d liczbę dni pracy, to będziemy mogli napisać: $z = d \cdot 7\frac{1}{2}$.
3. Jak wiemy, pole prostokąta np. w cm^2 obliczamy, mnożąc przez siebie liczby, mierzące podstawę i wysokość w cm .
 Podaj kilka przykładów liczbowych!
 Jeżeli przez P oznaczymy pole prostokąta w cm^2 , przez p długość podstawy w cm , przez w długość wysokości w cm , wówczas możemy napisać: $P = p \cdot w$.
4. Jeżeli przez b oznaczymy ciężar towaru wraz z opakowaniem w kg , przez t ciężar opakowania w kg , przez n ciężar samego towaru w kg , wówczas: $b = t + n$.
5. Obwód koła w cm obliczamy, mnożąc liczbę wyrażającą w cm długość średnicy przez π ($= 3,14\dots$).
 Jeżeli oznaczymy przez O liczbę wyrażającą w cm obwód koła, przez d liczbę wyrażającą w cm średnicę koła, wówczas:
 $O = \pi \cdot d$.
 We wzorze powyższym O i d mogą oznaczać rozmaite liczby, zależnie od wielkości koła. Litera π oznacza zawsze tę samą liczbę, zw. ludolfiną, t. j. 3,14.

Zadania

1. Opierając się na przykładzie 3 str. 51, oblicz pole prostokąta, gdy: a) $p = 8 \text{ cm}$, $w = 3 \text{ cm}$; b) $p = 12 \text{ cm}$, $w = 5 \text{ cm}$; c) $p = 71 \text{ cm}$, $w = 16 \text{ cm}$!
 Sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach a), b), c)!
- Opierając się na przykładzie 4 str. 51, oblicz wagę brutto, gdy: a) $t = \frac{1}{2} \text{ kg}$, $n = 5 \text{ kg}$; b) $t = 2 \text{ kg}$, $n = 17 \text{ kg}$; c) $t = 2\frac{1}{2} \text{ kg}$, $n = 21\frac{1}{2} \text{ kg}$!
 Sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach a), b), c)!
2. Bok sześciokąta umiarowego wynosi: a) 3 cm ; b) 5 cm ; c) $7\frac{1}{2} \text{ cm}$; oblicz obwód tego sześciokąta!
 Oznacz przez O liczbę, wyrażającą w cm obwód sześciokąta, przez a liczbę, mierzącą bok w cm , i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć obwód, znając bok.
 Podstaw kolejno w otrzymanym wzorze za a wartości: $5\frac{1}{2} \text{ cm}$, 12 cm , $4\frac{1}{4} \text{ cm}$ i sformułuj za każdym razem, jakie rozwiązujesz zadanie!
3. Długość podstawy trójkąta wynosi: a) 8 cm , b) 9 cm , c) $10\frac{1}{2} \text{ cm}$,

długość zaś wysokości: a) 6 cm, b) 14 cm, c) 12 cm; oblicz pole tego trójkąta!

Oznacz przez P pole trójkąta wyrażone w cm^2 , przez p długość podstawy w cm , przez w długość wysokości w cm i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć pole trójkąta, znając długości podstawy i wysokości.

Podstaw w otrzymanym wzorze: a) $p = 16 \text{ cm}$, $w = 9 \text{ cm}$; b) $p = 5 \text{ cm}$, $w = 4\frac{1}{2} \text{ cm}$; c) $p = 10 \text{ cm}$, $w = 4,6 \text{ cm}$ i sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach a), b), c)!

4. Kilogram towaru kosztuje: a) 2 zł, b) 5 zł, c) 8 zł; ile kosztuje: a) 2, b) 7, c) $4\frac{1}{4} \text{ kg}$ tego towaru?

Oznacz przez a cenę 1 kg towaru, przez b liczbę, wyrażającą, ile kg towaru kupiłeś, przez c cenę zakupionego towaru, i napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć cenę towaru, wiedząc, ile kosztuje 1 kg i ile kg towaru kupiłeś. Podstaw w otrzymanym wzorze: a) za $a - 3 \text{ zł}$, za $b - 8 \text{ kg}$; b) za $a - 2 \text{ zł } 40 \text{ gr}$, za $b - 12 \text{ kg}$; c) za $a - 4 \text{ zł } 20 \text{ gr}$, za $b - 6\frac{1}{2} \text{ kg}$ i sformułuj zadania, jakie rozwiązałeś w przypadkach a), b), c).

5. Piechur, przebywając: a) 1,5 m, b) 1,8 m, c) $1\frac{1}{4} \text{ m}$ w 1 sekundzie, idzie przez: a) 1 godzinę, b) 2 godz., c) 1 godz. 20 min.; oblicz drogę, którą przebył!

Oznacz przez c drogę w m , jaką przebywa piechur w 1 sek., przez t liczbę sekund, wyrażającą czas trwania chodu, przez s długość przebytej drogi w m . Napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć przebytą drogę, znając drogę, jaką piechur przebywa w 1 sek., oraz znając liczbę sekund, wyrażającą czas trwania chodu.

Podstaw w otrzymanym wzorze: a) za $c - 1\frac{1}{4} \text{ m}$ w 1 sek., za $t - 3000 \text{ sek.}$; b) za $c - 2 \text{ m}$ w 1 sek., za $t - 1\frac{1}{4} \text{ godz.}$; c) za $c - 1\frac{3}{10} \text{ m}$ w 1 sek., za $t - 3 \text{ godz.}$ i sformułuj za każdym razem zadanie, które rozwiązałeś!

6. Samolot przebywa w 1 sek. drogę: a) 30 m, b) 40 m, c) 50 m; w jakim czasie przebędzie drogę: a) 120 km, b) 144 km, c) 180 km?

Wprowadziwszy oznaczenia, jak w poprzednim zadaniu, napisz wzór, przy pomocy którego będziesz mógł obliczyć czas trwania lotu, gdy znasz długość drogi i prędkość, z jaką samolot się porusza.

Podstaw w otrzymanym wzorze: a) za $s - 140\,000 \text{ m}$, za $c - 35 \text{ m}$ w 1 sek., b) za $s - 360\,000 \text{ m}$, za $c - 45 \text{ m}$ w 1 sek., c) za

$s = 540\,000\text{ m}$, za $c = 60\text{ m}$ w 1 sek. i sformułuj zadanie, jakie za każdym razem rozwiązałeś!

Wartości liczbowe wyrażeń

Przykłady:

1. Przypuśćmy, że mamy jakieś wyrażenie, jak np.: $2 \cdot a + 3$. Jeżeli za a podstawimy jakąś liczbę, np. 5, wówczas otrzymamy wyrażenie: $2 \cdot 5 + 3$.

Obliczając to wyrażenie, otrzymamy na wynik 13. Mówimy, że 13 jest wartością liczbową wyrażenia $2 \cdot a + 3$ dla $a = 5$.

Jeżeli za a podstawimy np. 7, otrzymamy jako wartość liczbową wyrażenia liczbę 17.

Możemy utworzyć tabelkę, pisząc w pierwszym wierszu liczby, jakie podstawiamy za a , w drugim otrzymane wartości liczbowe (rys. 9).

a	1	2	3	4	5	7
$2 \cdot a + 3$	5	7	9	11	13	17

Rys. 9.

Podobnie na rys. 10 tabelka przedstawia wartości liczbowe wyrażenia: $3 \cdot (a + 1)$

a	1	2	3	4	5
$3 \cdot (a + 1)$	6	9	12	15	18

Rys. 10.

2. Mamy wyrażenie $2 \cdot a + b$.

Jeżeli podstawimy np. $a = 1$, $b = 3$, to otrzymamy jako wartość liczbową $2 \cdot 1 + 3$, t. j. 5.

Tabelka (rys. 11) podaje nam wartości liczbowe tego wyrażenia, otrzymane przez podstawienie za a i b rozmaitych liczb:

a	1	1	2	2	3	3	3
b	1	2	1	2	1	2	3
$2 \cdot a + b$	3	4	5	6	7	8	9

Rys. 11.

Moglibyśmy również zapisać wartości liczbowe w postaci tabliczki (podobnej do tabliczki mnożenia).

		a		
		1	2	3
b	1	3	5	7
	2	4	6	8
	3	5	7	9

Jeżeli chcemy wiedzieć jaką wartość liczbową otrzymamy np. dla $a=3$, $b=2$, to bierzemy pod uwagę pole w 3-ciej kolumnie w 2-gim wierszu; liczba 8, stojąca na tym polu, jest szukaną wartością liczbową.

Uwaga 1: Jeżeli przed literą stoi znak $.$ lub $\times$, oznaczający mnożenie, to znak ten możemy opuścić.

A więc $2.a=2a$, $a.b=ab$, $5a+1=5.a+1$, $3+5a=3+5.a$, $3ab+7a=3.a.b+7.a$ i t. d.

Znaków $+$ $-$ $:$ nie wolno opuszczać.

Uwaga 2. Nie zawsze istnieje wartość liczbową wyrażenia.

Np. wyrażenie: $a-5$ nie ma wartości liczbowej dla $a=3$, bo nie można od 3 odjąć 5.

Podobnie wyrażenie: $\frac{1}{a}$ nie ma wartości liczbowej dla $a=0$, gdyż symbol $\frac{1}{0}$ nic nie znaczy.

Zadania

1. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $a+1$ dla $a=1, 2, 5, 7, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}$;

b) $b-1$ dla $b=2, 3, 4, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{9}{4}, \frac{11}{7}$;

c) $x+\frac{1}{2}$ dla $x=0, \frac{1}{2}, 1, 7, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}$;

d) $y-\frac{1}{2}$ dla $y=\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 6, \frac{9}{4}, \frac{7}{5}, \frac{11}{7}$.

Sporządź tabelkę!

2. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $5a$ dla $a=3, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 4, 15, \frac{3}{7}, \frac{8}{11}$;

b) $\frac{2}{3}c$ dla $c=0, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 7, 18, \frac{13}{2}$;

c) $3x+2$ dla $x=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$;

d) $\frac{2}{5}y-1$ dla $y=3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5, 5\frac{1}{2}, 6$.

Sporządź tabelkę!

3. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $\frac{2a+1}{3a-1}$ dla $a=1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{2}, 5$;

b) $\frac{8d-5}{5d+2}$ dla $d=1, \frac{4}{3}, 2, \frac{6}{5}, 3, \frac{7}{2}, \frac{9}{4}$;

c) $\frac{\frac{2}{3}z+1}{\frac{3}{4}z+2}$ dla $z=0, \frac{3}{2}, 2, \frac{1}{5}, 3, 4, 9$;

d) $\frac{\frac{1}{4}x + \frac{2}{5}}{\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}}$ dla $x = 2, 3, 4, 4\frac{1}{2}, 6, 6\frac{1}{2}$.

Sporządź tabelkę!

4. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $2a + 3b - 1$ dla $a = 0, b = 1$; $a = 1, b = 0$; $a = 1, b = 1$;

b) $4x - 2y + 5$ dla $x = 1, y = 0$; $x = 2, y = 1$; $x = 3, y = 4$;

c) $\frac{5c + 2d - 2}{3c + d + 4}$ dla $c = 0, d = 1$; $c = 1, d = 0$; $c = 5, d = 9$.

5. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $(3x + 8) - (2x - 6)$ dla $x = 3, 4, 3\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, 5$;

b) $(6x - 1)(5x + 8) - (7x - 3)$ dla $x = 3, \frac{3}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 1$;

c) $2x^3 + 5x^2 + 7x + 2$ dla $x = 0, 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$;

d) $\frac{3x - 8}{2x + 5} - \frac{4x - 18}{7x - 5}$ dla $x = 5, 6, 7, 8, 9$;

e) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ dla $x = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4$.

6. Oblicz wartości liczbowe wyrażeń:

a) $(2x + 3)(5y + 7) - (3xy - 23)$ dla: $x = 3, y = 2$;

$x = 2, y = 3$; $x = 2, y = 2$;

b) $(2x + 3y - 1)(3x + 2y + 1) - (xy + 2)$ dla: $x = 5, y = 7$;

$x = 7, y = 5$; $x = 1, y = 1$; $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$; $x = 2, y = 0$.

c) $\frac{7a + 3b + 1}{4a + 5b + 8} - \frac{8b - 1}{5a + 2}$ dla $a = 2, b = 3$.

7. Podstaw kilka razy w ułamku $\frac{x}{5}$ takie liczby w miejsce litery x , aby wartość w ten sposób powstałego ułamka była liczbą całkowitą!

8. Jakie liczby naturalne można wstawić w miejsce litery a , aby ułamek $\frac{a}{9}$ był ułamkiem właściwym?

9. Jakie liczby naturalne można wstawić w miejsce litery x , aby ułamek $\frac{9}{x}$ był niewłaściwy?

10. Oblicz wartość liczbową wyrażenia: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

a) dla $n = 1, 10, 15, 20, 100$;

b) przekonaj się, że np. dla $n = 3$ wartość powyższego wyrażenia wynosi $1^2 + 2^2 + 3^2$;

c) sprawdź jeszcze na kilku przykładach, że wzór powyższy daje sumę kwadratów pierwszych n liczb.

11. Zastąp literę x taką liczbą, aby:

a) $x + 7 = 15$; b) $x - 2 = 9$; c) $x \cdot 5 = 20$; d) $x : 3 = 7$;

e) $2 \cdot x = 10$; f) $\frac{x}{3} = 24$; g) $\frac{8}{x} = 4$.

12. a jest liczbą całkowitą; którą liczbą z kolei po a jest liczba b , jeżeli: $b = a + 1$; $b = a + 2$; $b = a + 8$.
13. a jest pewną liczbą całkowitą;
 a) jaka liczba całkowita następuje po a ?
 b) jaka liczba całkowita jest druga z kolei po a ?
 c) jaka liczba całkowita jest siódma z kolei po a ?
14. W sumie: $x + y + z$ zmień porządek składników na wszystkie możliwe sposoby. Oblicz za każdym razem wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = 1$, $y = 5$, $z = 2\frac{1}{2}$.
15. Ile wynosi x , jeżeli:

	odjemna	odjemnik	różnica
a)	$\frac{8}{5}$	$\frac{3}{4}$	x
b)	a	b	x
c)	a	a	x
d)	x	4,5	2,5
e)	x	b	$a - b$
f)	x	a	0
g)	5	x	$1\frac{1}{5}$
h)	a	x	$a - b$
i)	a	x	0

16. Ile wynosi x , jeżeli:

a) $11 - \frac{3}{4} = x$; b) $a - a = x$; c) $x - 7 = 3,4$;
 d) $x - b = a - b$; e) $x - a = 0$; f) $7 - x = 2,8$;
 g) $a - x = a - b$; h) $a - x = 0$.

17. Przedstaw w postaci iloczynu następujące sumy:

$$a + a + a, \quad x + x + x + x + x, \quad z + z.$$

18. Przedstaw w postaci sumy następujące iloczyny: $2 \cdot a$, $7 \cdot x$,

19. Ile to jest: $a \cdot 0$, $a \cdot 1$, $1 \cdot a$, $0 \cdot a$?

20. Oblicz: a) a^2 dla $a = 3, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}$; b) a^3 dla $a = \frac{1}{3}, 2, 6$;
 c) $\frac{1}{2}a^4$ dla $a = 1, \frac{1}{2}, 2$; d) $5x^2$ dla $x = 2, \frac{1}{4}, 3$;
 e) $4,6y^3$ dla $y = 3; 0,1; 0,9$.

21. Zamieniając najpierw potęgi na iloczyn równych czynników, przedstaw w najprostszej formie iloczyny:

$$a \cdot a^2, x \cdot x^3, a^2 \cdot a^3, x^3 \cdot x^2, a \cdot a^4, x^5 \cdot x.$$

22. Ile to jest: a) $a : a$, $0 : a$, jeżeli a nie jest 0; b) $a : 1$.

23. Oblicz (liczby a i x są różne od zera):

$$a) a^3 : a, a^4 : a, a^5 : a, a^6 : a; \quad b) x^5 : x, x^5 : x^2, x^5 : x^3, x^5 : x^4.$$

24. Oznaczmy ciężar ciała, wyrażony w gramach, przez Q , ciężar 1 cm^3 tego ciała (wyrażony w g) przez q , objętość zaś tego ciała wyrażoną w cm^3 przez v ; w takim razie mamy wzór: $Q = v \cdot q$.

- Oblicz Q , jeżeli: a) $v \text{ cm}^3 = 5 \text{ cm}^3$, $qg = 21,4 \text{ g}$ (platyna);
 b) $v \text{ cm}^3 = 8 \text{ cm}^3$, $qg = 19,3 \text{ g}$ (złoto);
 c) $v \text{ cm}^3 = 15 \text{ cm}^3$, $qg = 11,34 \text{ g}$ (ołów);
 d) $v \text{ cm}^3 = 21 \text{ cm}^3$, $qg = 8,93 \text{ g}$ (miedź);
 e) $v \text{ cm}^3 = 40 \text{ cm}^3$, $qg = 7,25 \text{ g}$ (żelazo lane).

Jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie?

25. Jeśli boki równoległe trapezu mają $a \text{ cm}$ i $b \text{ cm}$, wysokość zaś $w \text{ cm}$, to pole P (w cm^2) tego trapezu wyraża się wzorem;

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot w.$$

Wyjaśnij ten wzór i posługując się nim oblicz pole trapezu, gdy:

- a) $a \text{ cm} = 3 \text{ cm}$, $b \text{ cm} = 2 \text{ cm}$, $w \text{ cm} = 1 \text{ cm}$;
 b) $a \text{ cm} = 8 \text{ cm}$, $b \text{ cm} = 5 \text{ cm}$, $w \text{ cm} = 3 \text{ cm}$;
 c) $a \text{ cm} = 10 \text{ cm}$, $b \text{ cm} = 7 \text{ cm}$, $w \text{ cm} = 4 \text{ cm}$.

26. Kamień wolno puszczony po upływie t sekund przebiega drogę $s \text{ cm}$, która wyraża się wzorem: $s = 4,905 t^2$.

Oblicz na podstawie tego wzoru s , gdy a) $t = 5$, b) $t = 10$,
 c) $t = 30$, d) $t = 40$.

Wyjaśnij, jakie za każdym razem rozwiązałeś zadanie!

27. Jeśli bok trójkąta równobocznego ma $a \text{ cm}$, to pole p (w cm^2) wyraża się w przybliżeniu wzorem: $p = 0,433 \cdot a^2$.

Oblicz na podstawie tego wzoru pole trójkąta równobocznego o boku a) 3 cm , b) 5 cm , c) $4\frac{1}{2} \text{ cm}$.

Sprawdź za każdym razem otrzymany wynik, mierząc na rysunku wysokość trójkąta i obliczając jego pole jako połowę iloczynu podstawy i wysokości.

28. Jeśli obwód koła wynosi $a \text{ cm}$, to jego pole p (w cm^2) wyraża się wzorem: $p = \frac{1}{4\pi} \cdot a^2 = 0,07957 a^2$.

Oblicz pole koła, którego obwód wynosi a) 20 cm , b) 50 cm ,
 c) 1 dcm .

29. Jeśli przyprostokątne trójkąta prostokątnego mają $a \text{ cm}$ i $b \text{ cm}$, przeciwprostokątna zaś $c \text{ cm}$, to wówczas: $a^2 + b^2 = c^2$.

Narysuj dowolny trójkąt prostokątny, zmierz jego boki (w cm) i sprawdź powyższy wzór. Powtórz to kilka razy!

30. Oznaczmy przez l długość drutu miedzianego, wyrażoną w m , przez L długość tego drutu (wyrażoną w m) po ogrzaniu o t stopni C; w takim razie, jak doświadczenie uczy, mamy wzór:

$$L = l (1 + 0,000017 t).$$

Oblicz na podstawie tego wzoru L , gdy:

- a) $l\ m = 8\ m$, $t^{\circ} C = 12^{\circ} C$; b) $l\ m = 20\ m$, $t^{\circ} C = 15^{\circ} C$;
 c) $l\ m = 15\ m$, $t^{\circ} C = 21^{\circ} C$.

Jakie zadanie za każdym razem rozwiązałeś?

Mieszaniny

1. a) Kupiec zmieszał $a\ kg$ kawy jednego gatunku po $p\ zł$ za $1\ kg$ i $b\ kg$ kawy drugiego gatunku po $q\ zł$ za $1\ kg$; ile kosztował $1\ kg$ mieszaniny?

Rozwiązanie:

$a\ kg$ kawy I gat. kosztuje $a \cdot p\ zł$

$b\ kg$ kawy II gat. kosztuje $b \cdot q\ zł$

Razem mieszanina kosztuje $zł: ap + bq$.

Ponieważ ciężar mieszaniny w kg wynosi $a + b$, przeto, oznaczając przez C cenę (w $zł$) $1\ kg$ tej mieszaniny, mamy:

$$C = \frac{ap + bq}{a + b}.$$

b) Kupiec zmieszał $6\ kg$ tytoniu po $56\ zł$ za $1\ kg$ i $8\ kg$ tytoniu po $48\ zł$ za $1\ kg$; ile kosztował $1\ kg$ tej mieszaniny? (Rozwiąż wprost i na podstawie wzoru).

c) Do $2\ kg$ kwasu siarkowego po $5\ zł$ za $1\ kg$ dolano $20\ kg$ wody; ile kosztował $1\ kg$ mieszaniny?

d) Do $7\ l$ spirytusu po $6\ zł$ za $1\ l$ dolano $8\ l$ wody; ile kosztował $1\ l$ mieszaniny?

e) Handlarz win zmieszał $400\ l$ wina po $4\ zł$ za $1\ l$ i $300\ l$ po $6\ zł$ za $1\ l$; ile kosztował $1\ l$ mieszaniny?

2. a) Kupiec zmieszał $a\ kg$ herbaty po $p\ zł$ za $1\ kg$, $b\ kg$ herbaty po $q\ zł$ za $1\ kg$ i $c\ kg$ herbaty po $r\ zł$ za $1\ kg$. Przekonaj się że, oznaczając przez C cenę w $zł$ $1\ kg$ tej mieszaniny, mamy

$$C = \frac{ap + bq + cr}{a + b + c}.$$

b) Zmieszano trzy gatunki tytoniu: $8\ kg$ po $56\ zł$ za $1\ kg$, $12\ kg$ po $44\ zł$ za $1\ kg$ i $5\ kg$ po $60\ zł$ za $1\ kg$; ile kosztował $1\ kg$ mieszaniny? (Rozwiąż wprost i na podstawie wzoru).

c) Kupiec zmieszał trzy gatunki wina: $100\ l$ po $5\ zł$ za $1\ l$, $150\ l$ po $4\ zł$ za $1\ l$ i $50\ l$ po $8\ zł$ za $1\ l$; ile kosztował $1\ l$ tej mieszaniny?

Wielkości proporcjonalne

Stosunek dwóch wielkości

Przypuśćmy, że mamy dane dwie wielkości, np. dwa odcinki AB i CD (rys. 12). Starajmy się znaleźć odcinek, któryby się w obu mieścił bez reszty. Odcinkiem takim jest odcinek a , który w AB mieści się 5 razy, w CD 3 razy.

Iloraz $5:3$ nazywamy wykładnikiem stosunku odcinka AB do CD .

Wykładnik stosunku odcinka AB do CD oznaczamy:

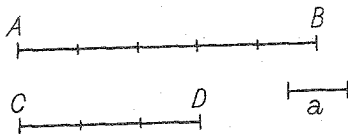
$$AB : CD \text{ lub } \frac{AB}{CD}.$$

$$\text{Zatem: } AB : CD = 5 : 3 = \frac{5}{3} \text{ lub } \frac{AB}{CD} = \frac{5}{3}.$$

Czytamy: AB jest w stosunku do CD , jak 5 do 3.

Z rys. 12 widzimy, że odcinek AB jest $\frac{5}{3}$ odcinka CD . Wykładnik stosunku dwóch odcinków wskazuje więc, jakim ułamkiem odcinka drugiego jest odcinek pierwszy.

Jeżeli odcinek a obierzemy za jednostkę długości, to długość odcinka AB wyrazi się liczbą 5, długość zaś odcinka CD liczbą 3.



Rys. 12.

Wykładnik stosunku $\frac{5}{3}$ jest więc równy ilorazowi długości odcinków AB i CD (wyrażonych w tych samych jednostkach długości).

Przykład: Jaki jest wykładnik stosunku odcinków AB i CD , których długości wynoszą odpowiednio $5\frac{1}{2}$ cm i $3\frac{1}{2}$ cm?

Rozwiązanie: Ponieważ wykładnik stosunku jest równy ilorazowi długości (przy tej samej jednostce), więc

$$AB : CD = 5\frac{1}{2} : 3\frac{1}{2} = \frac{5}{3}.$$

Czytamy: odcinek AB jest w stosunku do CD , jak $5\frac{1}{2}$ do $3\frac{1}{2}$.

Uwaga. To samo odnosi się do innych wielkości, jak pola, objętości, ciężary i t. p.

a) Jeżeli mamy dwa kwadraty o polach odpowiednio 4 cm^2 i 9 cm^2 , to mówimy, że są do siebie w stosunku jak 4 do 9, lub, że wykładnik stosunku pól wynosi $4:9 = \frac{4}{9}$.

b) Dwa ciężary jeden $2\frac{1}{4}$ kg, drugi $3\frac{1}{2}$ kg są do siebie w stosunku jak $2\frac{1}{4}$ do $3\frac{1}{2}$; wykładnik stosunku tych ciężarów wynosi $2\frac{1}{4} : 3\frac{1}{2} = \frac{9}{14}$.

Zadanie 1. Odcinek AB ma 5 cm; jak wielki jest odcinek CD , jeżeli $CD : AB = 2 : 3$.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x długość w cm odcinka CD . Mamy: $x : 5 = 2 : 3$, więc $x : 5 = \frac{2}{3}$.

Ponieważ szukamy dzielnej, więc $x = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$.

Zatem odcinek CD ma $\frac{10}{3}$ cm.

Zadanie 2. Odcinek CD ma 2 cm; jak wielki jest odcinek AB , jeżeli $AB : CD = 3 : 5$.

Rozwiązanie: Oznaczmy przez x długość (w cm) odcinka AB . Mamy: $2 : x = 3 : 5$, więc $2 : x = \frac{3}{5}$.

Ponieważ szukamy dzielnika, więc $x = 2 : \frac{3}{5} = \frac{10}{3}$. Zatem odcinek CD ma $\frac{10}{3}$ cm.

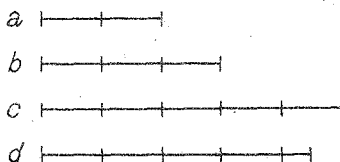
Zadania

1. W jakim stosunku jest odcinek AB do odcinka CD , jeśli długość odcinka AB wynosi: a) 2 cm, b) $\frac{3}{4}$ dcm, c) 0,8 dcm, odcinka zaś CD : a) 3 cm, b) $\frac{4}{5}$ dcm, c) 1,2 dcm?
2. W jakim stosunku są do siebie pola kwadratów o bokach: a) 5 cm i 3 cm, b) $\frac{1}{2}$ dcm i $\frac{2}{3}$ dcm, c) 0,6 dcm i 0,8 dcm? W jakim stosunku są do siebie obwody tych kwadratów?
3. W jakim stosunku są do siebie dwa ciężary: a) 3 kg i 8 kg, b) $\frac{5}{4}$ kg i $\frac{3}{10}$ kg, c) 0,6 kg i 1,6 kg?
4. W jakim stosunku są do siebie dwie pojemności: a) 5 l i 8 l, b) $\frac{3}{4}$ l i $\frac{1}{2}$ l, c) 1,2 l i 0,8 l?
5. Dwa odcinki są do siebie w stosunku jak: a) 2 : 3, b) 5 : 4, c) $\frac{3}{4} : \frac{2}{3}$, d) 1,7 : 2,3; dłuższy z nich ma: a) 7 cm, b) 35 km, c) $2\frac{5}{7}$ dcm, d) 13,5 km. Ile wynosi krótszy?
6. Dwa ciężary są do siebie w stosunku jak: a) 3 : 1, b) 6 : 8, c) 1,2 : $\frac{4}{5}$, d) $\frac{5}{3} : \frac{7}{4}$; mniejszy z nich ma: a) 2,5 kg, b) $\frac{5}{12}$ kg, c) 7,5 kg, d) $3\frac{2}{3}$ kg. Ile kg ma większy?
7. Jedno naczynie napelnimy, wlewając $2\frac{1}{2}$ szklanki wody, drugie, wlewając $4\frac{1}{2}$ takich szklanek wody. Jaki jest wykładnik stosunku pojemności tych naczyń do siebie? Jaka jest pojemność mniejszego naczynia, jeżeli większe ma pojemność 0,9 l?
8. Dwa prostokąty mają równe podstawy, a wysokości są w stosunku jak 2 : 3. Przekonaj się, że ich pola są również w stosunku jak 2 : 3, przyjmując np., że podstawa ma: a) 1 cm,

- b) $2\frac{1}{2}$ cm, c) 1,5 cm, wysokość zaś pierwszego prostokąta wynosi: a) 2 cm, b) $3\frac{1}{2}$ cm, c) 2,5 cm.
9. Dwa ciężary są do siebie w stosunku jak $1\frac{1}{2}:2$. Narysuj obok siebie dwa prostokąty o równej podstawie np. 1 cm, których wysokości będą w stosunku $1\frac{1}{2}:2$. Pola tych prostokątów będą również w stosunku $1\frac{1}{2}:2$. W ten sposób uzmysłowisz sobie ciężary i ich stosunek. Powtórz to zadanie, gdy ciężary są do siebie w stosunku, jak: a) 2:3, b) $3:2\frac{1}{2}$.

Podział w danym stosunku

Mówimy, że kilka odcinków np. a, b, c, d , (rys. 13) są do siebie w stosunku jak liczby 2, 3, 5, $3\frac{1}{2}$, jeżeli wykładnik stosunku dwóch odcinków równa się ilorazowi odpowiednich liczb.



Rys. 13.

A więc: $a:b=2:3$, $a:c=2:5$, $c:d=5:3\frac{1}{2}$, $c:a=5:2$ i t. d. Zapisujemy to: $a:b:c:d=2:3:5:3\frac{1}{2}$.

Uwaga. Pomnóżmy liczby 2, 3, 5, $3\frac{1}{2}$ przez jakąkolwiek liczbę (różną od zera) np. przez 2. Otrzymamy liczby 4, 6, 10, 7. Oczywiście iloraz odpowiednich liczb nie zmieni się. Mamy bowiem $2:3=4:6$, $3:3\frac{1}{2}=6:7$ i t. d. Możemy więc napisać:

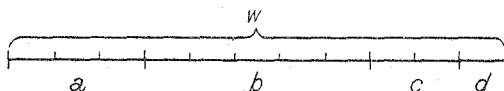
$$a:b:c:d=4:6:10:7.$$

Przypuśćmy, że stosunek kilku odcinków dany jest przy pomocy liczb ułamkowych np.: $a:b:c:d=\frac{2}{3}:\frac{5}{4}:1\frac{1}{2}:\frac{5}{8}$; mnożąc te liczby przez ich wspólny mianownik (t. j. 12) otrzymamy

$$a:b:c:d=8:15:7:10.$$

Stosunek kilku odcinków możemy więc zawsze wyrazić przy pomocy liczb całkowitych.

Na rys. 14 mamy odcinek w podzielony na odcinki a, b, c, d takie, że $a:b:c:d=3:5:2:1$.



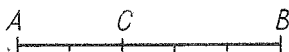
Rys. 14.

Mówimy, że odcinek w został podzielony w stosunku $3:5:2:1$ (czytaj 3 do 5 do 2 do 1).

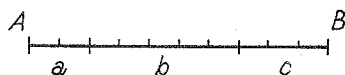
Na rys. 15 mamy odcinek AB podzielony na dwa odcinki w stosunku $2:3$.

Zadanie: Odcinek AB o długości 4 cm podzielić w stosunku $2:5:3$.

Dzielimy w tym celu odcinek na $2+5+3$ t. j. 10 równych części (rys. 16).



Rys. 15.



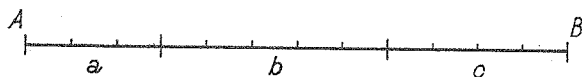
Rys. 16.

Odcinki a, b, c , mające odpowiednio 2, 5, 3 takie części, są oczywiście szukanymi odcinkami. Mamy bowiem $a:b:c=2:5:3$.

Ponieważ $\frac{1}{10}$ odcinka AB ma $0,4\text{ cm}$, więc odcinki a, b, c , mają odpowiednio długości: $0,8\text{ cm}$, 2 cm , $1,2\text{ cm}$.

Uwaga. Gdyby stosunek, w jakim mamy podzielić dany odcinek, nie był wyrażony w liczbach całkowitych, to należałoby te liczby pomnożyć przez ich wspólny mianownik.

Np.: chcemy podzielić dany odcinek AB w stosunku $\frac{1}{2}:\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$. Mnożąc liczby te przez 6, widzimy, że należy odcinek podzielić w stosunku: $3:5:4$. Dzielimy odcinek AB na $3+5+4$ t. j. 12 równych części. Odcinki a, b, c , zawierające odpowiednio 3, 5, 4 takie części, są szukanymi odcinkami. (Rys. 17).



Rys. 17.

Zadania

1. Podziel odcinek: a) 10 cm w stosunku $2:3$, b) 120 cm w stosunku $7:8$, c) 85 cm w stosunku $3:7$.
2. Podziel odcinek: a) 10 cm w stosunku $\frac{2}{3}:1:\frac{5}{6}$, b) 12 cm w stosunku $\frac{1}{2}:\frac{5}{6}:\frac{2}{3}$, c) 20 cm w stosunku $\frac{3}{4}:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{12}$.
3. Podziel liczbę: a) 24 w stosunku $1:2:5$, b) 663 w stosunku $2:3:8$, c) 4000 w stosunku $1:7:8$.
4. Podziel liczbę: a) 385 w stosunku $5:7:11:12$, b) 3854 w stosunku $6:8:10:12$, c) 3120 w stosunku $2:3:4:6$.
5. Podziel pole prostokąta o bokach 2 cm i 8 cm równoległymi do krótszego boku w stosunku $\frac{2}{3}:1:\frac{3}{2}:\frac{13}{6}$.

6. Podziel pole kwadratu o boku 6 cm (równoległymi do jednego z boków) w stosunku $\frac{3}{2} : \frac{5}{2} : 2$.
7. Podziel: a) 48 kg w stosunku 3:5, b) 165 zł w stosunku 2:7:9, c) 684 l w stosunku 2:4:5:7, d) 1863 m³ w stosunku 4:6:5:9.

Uwaga: Narysuj dowolny prostokąt, podziel jego podstawę w stosunku 3:5 i poprowadź przez punkt podziału równoległą do wysokości. Jeżeli pole całego prostokąta uzmysławia ciężar 48 kg, to mniejsze prostokąty uzmysławiają części, na które 48 kg podzieliłiśmy. Zrób taki rysunek w zadaniu b), c), d)!

8. Dwaj kupcy włożyli we wspólny interes: pierwszy 25 000 zł, drugi 38 000 zł. Przy likwidacji spółki otrzymano 94 900 zł jak mają się tem podzielić?
(Rozdziela się zazwyczaj w stosunku włożonych kapitałów).
9. Dwóch rolników wynajęło łąkę za 1400 zł. Jeden z nich wypasał na tej łące 36 wołów, drugi zaś 27 wołów; ile każdy z nich powinien zapłacić za łąkę?
(W stosunku liczby wołów).
10. Ktoś przekazał w testamencie 5160 zł na pokrycie swych zobowiązań, a winien był jednemu 2400 zł, drugiemu 2800 zł, trzeciemu 3400 zł; Jak należy między nich 5160 zł rozdzielić?
(W stosunku kwot wyrażających zobowiązania).
11. Trzej przemysłowcy włożyli we wspólny interes handlowy: pierwszy 12 000 zł, drugi 30 000 zł, trzeci 7500 zł. Jak podzieliłi się zyskiem, który wynosił 6435 zł?
(W stosunku włożonych kwot).
12. Czterech przemysłowców włożyło we wspólne przedsiębiorstwo: pierwszy 7200 zł, drugi 7500 zł, trzeci 8000 zł i czwarty 9100 zł. Jak należy podzielić między nich stratę, która wynosi 1272 zł?
(W stosunku włożonych kwot).
13. Trzej kupcy włożyli we wspólny interes jednakowe kapitały. Jak mają podzielić się zyskiem 12 835 zł, jeżeli kapitał pierwszego kupca był w obrocie 1 rok, drugiego $1\frac{1}{2}$ roku, a trzeciego $2\frac{1}{2}$ lat?
(W stosunku liczb wyrażających czas obrotu).
14. Czterej robotnicy zarobili razem 232 zł 50 gr; ile zarobił każdy z nich, jeżeli pierwszy pracował 6 dni, drugi i trzeci po 8 dni, czwarty zaś 9 dni?
(W stosunku liczb dni).

Tabele i przedstawienia graficzne

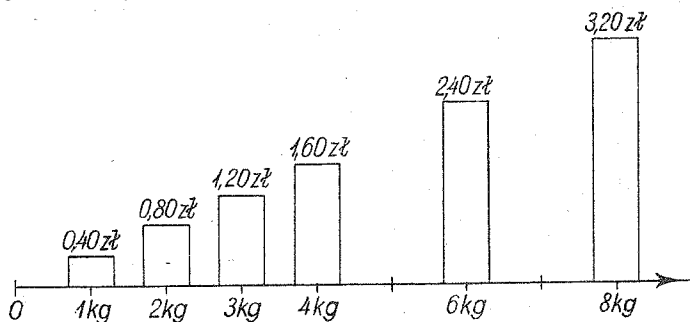
1. Tabelka (rys. 18) wskazuje nam ceny różnych ilości soli. Liczby stojące w pierwszym wierszu wskazują ilość soli w *kg*, liczby poniżej stojące odpowiednią cenę soli w *zł*.

A więc 1 *kg* kosztuje 0,40 *zł*, 3 *kg* — 1,20 *zł* i t. d.

Ilość soli w <i>kg</i> . . .	1	2	3	4	6	8
Cena soli w <i>zł</i> . . .	0,40	0,80	1,20	1,60	2,40	3,20

Rys. 18.

Moglibyśmy jeszcze w inny sposób przedstawić ceny rozmaitych ilości soli. Kreślimy prostokąty o równych podstawach i o wysokościach 0,40 *cm*, 0,80 *cm*, 1,20 *cm* i t. d. (rys. 19). Wysokości te wskazują nam cenę soli w ten sposób, że 1 *cm* wysokości odpowiada 1 *zł*. A więc prostokąt o wysokości 1,40 *cm* wskazuje, że odpowiednia ilość soli kosztuje 1,40 *zł* i t. d.



Rys. 19.

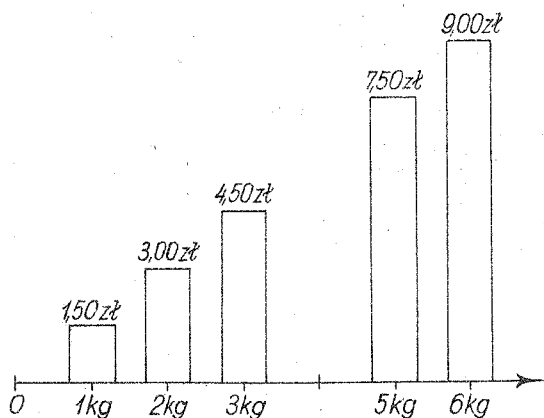
Powyższy sposób przedstawienia nazywa się sposobem wykreślnym lub graficznym.

2. Tabelka (rys. 20) przedstawia nam cenę rozmaitej ilości cukru.

Ilość cukru w <i>kg</i> . . .	1	2	3	5	6
Cena cukru w <i>zł</i> . . .	1,50	3,00	4,50	7,50	9,00

Rys. 20.

Na rys. 21 przedstawioną mamy tabelkę powyższą graficznie na $\frac{1}{2}$ *cm* wysokości prostokątów wypada 1 *zł*, t. zn., że np. 3,00 *zł* zaznaczono prostokątem o wysokości 1,5 *cm*.



Rys. 21.

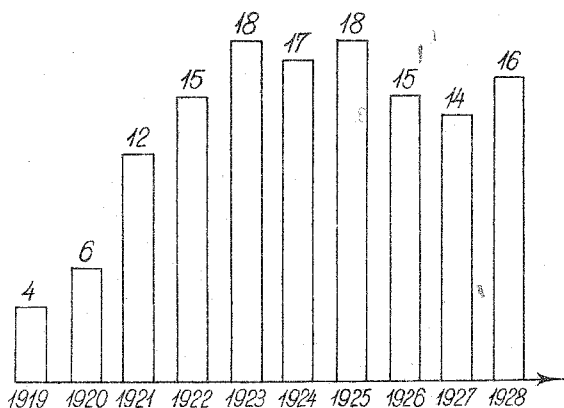
3. Tabelka (rys. 22) przedstawia nam przyrost ludności w Polsce, przypadający na każdy tysiąc mieszkańców w latach 1919—1928.

Rok	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928
Przyrost roczny	4	6	12	15	18	17	18	15	14	16

Rys. 22.

Na rys. 23 przedstawioną mamy powyższą tabelkę graficznie.

Na $\frac{1}{4}$ cm wysokości prostokąta wypada przyrost ludności o 1 człowieka. Prostokąt więc o wysokości 3 cm wskazuje przyrost o 12 mieszkańców.



Rys. 23.

Zadania

- 1 kg towaru kosztuje 20 zł. Ile kosztuje: 2 kg, 3 kg, 4 kg, 5 kg, 6 kg? Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie; przyjmij, że na 1 cm wysokości prostokątów przypada 20 zł!
- Ile wynosi: a) obwód, b) pole kwadratu, jeśli jego bok ma 1 cm, $1\frac{1}{2}$ cm, 2 cm, $2\frac{1}{2}$ cm, 3 cm. Sporządź tabelkę i przedstaw ją graficznie!
- Niżej podana tabelka daje cenę III kl. pociągu osobowego w zależności od liczby km; przedstaw ją graficznie!

Km	1—5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Zł	0,40	0,40	0,60	0,60	0,60	0,80	0,80	0,80	1	1	1	1,20	1,20

4. Sporządź tabelkę, w której w pierwszym wierszu są liczby od 1 do 9, w drugim zaś odpowiednio iloczyny tych liczb przez $\frac{1}{2}$. Przedstaw tę tabelkę graficznie!
5. Komunikacja lotnicza w Polsce zaznaczona jest tabelką, w której podana jest liczba zaokrąglona lotów w odnośnym roku.

Rok	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929
Liczba lotów .	250	600	800	1500	2700	2900	3700	3900	6100

Przedstaw ją graficznie, przyjmując, że na 2 mm wysokości prostokątów przypada 100 lotów.

Wielkości wprost proporcjonalne

Określenia

1. Cena, jaką płacimy za sól, zależy od jej ilości, t. j. od wagi. Tabelka (rys. 24) wskazuje nam ceny różnych ilości kg soli.

Ilość soli w kg	1	2	3	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Cena soli w zł	0,40	0,80	1,20	1,60	0,20	0,10	0,05

Rys. 24.

Za 2 kg soli zapłacimy 2 razy więcej niż za 1 kg; za 3 kg trzy razy więcej, niż za 1 kg i t. d. Podobnie za $\frac{1}{2}$ kg soli zapłacimy połowę ceny 1 kg soli, za $\frac{1}{4}$ kg zapłacimy $\frac{1}{4}$ ceny 1 kg i t. d.

Weźmy pod uwagę dwie ilości soli np. 2 kg i 4 kg.

Z tabelki mamy: 2 kg kosztują 0,80 zł,

4 kg kosztują 1,60 zł.

Ile razy więc 4 *kg* jest większe od 2 *kg*, tyle razy 1,60 zł jest większe od 0,80 zł. Zatem: $4:2 = 1,60:0,80$.

Iloraz 4:2 jest wykładnikiem stosunku obu ilości soli, zaś 1,60:0,80 wykładnikiem stosunku ich cen.

Widzimy zatem, że wykładnik stosunku dwóch ilości soli jest równy wykładnikowi stosunku odpowiednich cen.

Jeżeli więc *a*, *b* oznaczają dwie ilości soli w *kg*, zaś *c*, *d* ich ceny w zł, to możemy napisać: $a:b = c:d$ lub $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Mówimy, że cena i waga są do siebie wprost proporcjonalne.

Podobnie zachowuje się cena i waga wielu innych towarów (np. kawy, herbaty i t. p.). Za dwa razy większą ilość kawy (herbaty) musimy zapłacić dwa razy więcej, za trzy razy większą ilość trzy razy więcej i t. d. Mówimy, że cena i waga takich towarów są do siebie wprost proporcjonalne.

Mleko sprzedajemy na litry. Za 2 l mleka należy 2 razy więcej zapłacić niż za 1 l, za 3 l mleka 3 razy więcej niż za 1 l i t. d.

Mówimy, że cena mleka jest wprost proporcjonalna do liczby litrów.

Podobnie cena sukna (z pewnego zwoju) jest wprost proporcjonalna do liczby metrów tego sukna.

Uwaga 1. Niezawsze cena i waga towaru są do siebie wprost proporcjonalne. Np. cena diamentu zmienia się w ten sposób z jego wagą, że diament dwa razy cięższy kosztuje 4 razy więcej, 3 razy cięższy 9 razy więcej i t. d. A więc cena diamentu nie jest proporcjonalna do jego wagi.

Uwaga 2. Jeżeli 3 *kg* soli kosztuje 1,20 zł, to 1 *kg* kosztuje zł: $1,20:3 = 0,40$.

Widzimy stąd, że, dzieląc cenę soli przez liczbę *kg*, otrzymamy cenę 1 *kg* soli. Zatem, dzieląc w tabelce (rys. 24) liczbę dolną przez odpowiednią górną, otrzymamy zawsze na wynik 0,40.

A więc:

$$0,40:1 = 0,80:2 = 1,20:3 = 0,20:\frac{1}{2} = 0,10:\frac{1}{4} = 0,05:\frac{1}{8} = 0,40.$$

Liczbę 0,40 nazywamy współczynnikiem proporcjonalności. Współczynnik proporcjonalności jest więc ilorazem liczb mierzących odpowiednie sobie wielkości. W naszym wypadku współczynnik proporcjonalności oznacza w zł cenę 1 *kg* soli.

Jeżeli mamy taką tabelkę liczb jak rys. 24, mającą tę własność,

że iloraz dwóch liczb pierwszego wiersza jest równy ilorazowi odpowiednich liczb drugiego wiersza, to mówimy, że liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza.

Przykłady takich tabelek podają nam rys. 25 i 26.

1	2	3	4
5	10	15	20

Rys. 25.

3	6	9	24
4	8	12	32

Rys. 26.

W powyższych tabelkach liczbom dwa razy większym odpowiadają liczby dwa razy większe, liczbom trzy razy większym, liczby trzy razy większe i t. d. Widzimy również, że iloraz odpowiednich liczb jest zawsze ten sam: $\frac{1}{5} = \frac{2}{10} = \frac{3}{15} = \dots$ (rys. 25).

Liczbę $\frac{1}{5}$ nazywamy również i w tym przypadku współczynnikiem proporcjonalności.

W drugiej tabelce (rys. 26) współczynnik proporcjonalności wynosi $\frac{3}{4}$.

2. Jeżeli płaca robotnika wynosi dziennie np. 3 zł, to jego zarobek zależy od liczby dni roboczych. W czasie dwa razy większym zarobi dwa razy więcej, w czasie trzy razy większym trzy razy więcej i t. d.

Mówimy i tutaj, że zarobek robotnika jest wprost proporcjonalny do liczby dni roboczych.

Zarobek robotnika wynosi: 3 zł w 1 dniu, 6 zł w 2 dniach, 18 zł w 6 dniach i t. d. Mamy: $3:1 = 6:2 = 18:6$ i t. d.

Iloraz $3:1$ t. j. 3 jest współczynnikiem proporcjonalności. Współczynnik proporcjonalności wyraża dzienny zarobek robotnika.

3. Jeżeli samolot przelatuje przeciętnie w 1 sek. np. 40 m, to droga jaką przeleci, zależy od czasu. W czasie dwa razy dłuższym przeleci dwa razy większą drogę, w czasie trzy razy dłuższym trzy razy większą drogę i t. d.

Mówimy, że droga, jaką samolot przelatuje, jest wprost proporcjonalna do czasu, zużytego na jej przebycie.

Samolot przelatuje 40 m w 1 sek., 80 m w 2 sek., 200 m w 5 sek. i t. d. Mamy: $40:1 = 80:2 = 200:5$ i t. d.

Iloraz $40:1$ t. j. 40 jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża on w m drogę samolotu w 1 sek., czyli prędkość samolotu.

Mówimy, że prędkość samolotu wynosi 40 m na sek., co pi-

szemy 40 m/sek. Tak samo, jeżeli pociąg przebiega 70 km na godzinę mówimy, że prędkość jego wynosi 70 km na godz., co zapisujemy 70 km/godz.

4. Podobnie mówimy, że obwód kwadratu jest wprost proporcjonalny do długości boku (bo ile razy bok zwiększymy, tyle razy zwiększymy obwód).

Ponieważ obwód kwadratu jest 4 razy większy od boku kwadratu, więc współczynnik proporcjonalności wynosi 4.

5. 1 cm³ ołowiu waży 11,34 g; zatem 2 cm³ ważą dwa razy więcej, 3 cm³ trzy razy więcej i t. d.

Mówimy, że ciężar ołowiu jest wprost proporcjonalny do objętości.

Ciężar 1 cm³ wynosi 11,34 g, ciężar 2 cm³ wynosi 22,68, ciężar 5 cm³ wynosi 56,7 i t. d. Mamy: $11,34:1 = 22,68:2 = 56,7:5$ i t. d.

Iloraz $11,34:1$ t. j. 11,34 jest współczynnikiem proporcjonalności. Wyraża ciężar jednego cm³ ołowiu, czyli t. zw. ciężar właściwy. Mówimy, że ciężar właściwy ołowiu wynosi 11,34 g na 1 cm³, co zapisujemy 11,34 g/cm³.

Ponieważ 1 cm³ złota waży 19,3 g, zatem ciężar właściwy złota wynosi 19,3 g/cm³ (co czytamy 19,3 g na cm³).

W przykładach 1, 2, 3, 4 i 5 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) cena soli zależy od liczby kg soli, 2) zarobek robotnika zależy od liczby dni roboczych, 3) droga samolotu zależy od czasu lotu, 4) obwód kwadratu zależy od długości boku, 5) ciężar ołowiu zależy od objętości.

Wielkości, występujące w każdym z powyższych przykładów, nazwalimy wprost proporcjonalnymi.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są wprost proporcjonalne, należy zbadać:

- 1) czy zwiększając jedną, tem samym zwiększamy drugą;
- 2) czy zwiększając jedną 2, 3, ... razy, zwiększamy tem samym drugą odpowiednio 2, 3, ... razy.

Zadania

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i przekonaj się, że liczby jednego wiersza są wprost proporcjonalne do liczb drugiego wiersza. Wskaż następnie w każdym zadaniu te wielkości, których proporcjonalność wynika z tabelki. Oblicz, ile wynosi współczynnik proporcjonalności i co oznacza? Sporządź wkońcu wykres w odpowiedniej skali!

- a) Kula karabinowa przebiega w 1 sek. 600 m; ile przebiega w 2, 3, 4, 7, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{15}$ sek.?
- b) 1 cm^3 złota waży 19,3 g; ile waży 2 cm^3 , 5 cm^3 , 10 cm^3 , 1 dm^3 , $\frac{1}{2}$ cm^3 , $\frac{1}{4}$ cm^3 , $\frac{3}{4}$ cm^3 ?
- c) Pociąg jedzie z prędkością 60 km na godzinę; jaką drogę zrobi w 2, 3, 5, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ godziny?
- d) 1 l wina kosztuje 6 zł; ile kosztuje: $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$ l wina?
- e) Parowiec w 1 sek. przepływa średnio 13 m; ile przepływa w 2, 3, 4, 5, 6, 7 godzinach?
2. Narysuj trójkąty równoboczne o boku 1 cm, 2 cm, 4 cm, 6 cm i mierząc ich wysokości, przekonaj się, że wysokości są wprost proporcjonalne do boków; ile wynosi współczynnik proporcjonalności?
3. Czy obwód koła jest wprost proporcjonalny do promienia? Ile wynosi współczynnik proporcjonalności?
4. Czy pole kwadratu jest wprost proporcjonalne do długości boku?
5. Prostokąt ma podstawę 3 cm; czy jego pole jest wprost proporcjonalne do wysokości?
6. Kamień wolno puszczoney w pierwszej sek. przebiega 5 m, w dwóch pierwszych sek. 20 m, w trzech pierwszych sek. 45 m, w czterech pierwszych sek. 80 m; czy możemy powiedzieć, że droga, jaką kamień przebiega, jest wprost proporcjonalna do czasu?
7. Mnożna wynosi 5; czy wartość iloczynu jest wprost proporcjonalna do mnożnika?
8. Dzielnik wynosi 3; czy wartość ilorazu jest wprost proporcjonalna do dzielnej?
9. Czy wartość ułamka o mianowniku 4 jest wprost proporcjonalna do licznika?
10. Płytką metalową kwadratową, o boku 1 cm, kosztuje 10 gr; ile kosztuje płytką kwadratową o boku 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm? Czy cena płytki jest wprost proporcjonalna do długości boku?
11. Jaką liczbę trzeba wstawić w miejsce litery x, aby zachodziły równości?
- a) $x:6 = \frac{1}{2}$; $x:15 = \frac{7}{10}$; $x:3 = \frac{5}{18}$;
- b) $4:x = \frac{7}{11}$; $9:x = 4,5$; $7:x = \frac{4}{13}$;
- c) $\frac{2}{3} = x:2,5$; $\frac{8}{9} = x:15$; $12,6 = x:\frac{7}{3}$;
- d) $\frac{3}{7} = 2:x$; $4,9 = 7:x$; $\frac{1,4}{5} = \frac{2}{3}:x$.

Rozwiązuj w następujący sposób:

a) Ponieważ w równości $x : \frac{2}{3} = \frac{2^4}{5}$, szukaną liczbą jest dzielna, więc:

$$x = \frac{2^4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1^6}{5}.$$

b) Ponieważ w równości $\frac{3}{4} : x = \frac{7}{2}$, szukaną liczbą jest dzielnik, zatem

$$x = \frac{3}{4} : \frac{7}{2} = \frac{3}{14}.$$

Reguła trzech prosta

(Dla wielkości wprost proporcjonalnych)

Sztuka sukna 15 m długa kosztuje 300 zł; ile kosztują 4 m tego sukna?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

I. Wyznamy współczynnik proporcjonalności. Wynosi on $300 : 15 = 20$. Współczynnik proporcjonalności oznacza w naszym przypadku cenę 1 m sukna. Ponieważ 1 m sukna kosztuje 20 zł, więc 4 m sukna kosztują 80 zł. Rozumowanie powyższe możemy zapisać w następujący sposób:

15 m kosztuje 300 zł,
więc 1 m kosztuje $300 \text{ zł} : 15 = 20 \text{ zł}$,
a zatem 4 m kosztują $4 \cdot 20 \text{ zł} = 80 \text{ zł}$.

II. Oznaczając przez x liczbę zł, które trzeba zapłacić za 4 m sukna, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

15 m kosztuje 300 zł
4 m kosztuje x zł

Ponieważ wykładnik stosunku dwóch ilości towaru równa się wykładnikowi stosunku ich cen, więc otrzymujemy: $\frac{1^5}{4} = 300 : x$.

Ponieważ szukamy dzielnika, więc $x = 300 : \frac{1^5}{4} = 300 \cdot \frac{4}{1^5} = 80$.
4 m sukna kosztują więc 80 zł.

Każdy sposób rozwiązywania zadań, dotyczących wielkości wprost proporcjonalnych (przyczem trzy wielkości są dane, a poszukuje się czwartej), nazywamy regułą trzech prostą.

Uwaga. Rozwiążmy sposobem pierwszym następujące zadanie:
Jeśli 3 jaja kosztują 18 gr, to ile jaj otrzymamy za 12 gr?

Ponieważ za 18 gr otrzymujemy 3 jaja
więc za 1 gr otrzymamy $\frac{3}{18}$ jaja
a za 12 gr otrzymamy $12 \cdot \frac{3}{18}$ jaja = 2 jaja.

W tem zadaniu sposób pierwszy ma tę niedogodność, że zmusza nas do rozważania części przedmiotów, które są praktycznie

niepodzielne. Łatwo się przekonać, że ta trudność zniknie, jeżeli rozwiązywać będziemy to zadanie drugim sposobem.

Zadania

1. 18 kg kawy kosztuje 648 zł; ile kosztuje: a) 5 kg, b) 9 kg, c) $2\frac{1}{2}$ kg, d) $\frac{3}{4}$ kg?
2. 5 l wina kosztuje 30 zł; ile kosztuje: a) 7 l, b) 4,75 l, c) $3\frac{1}{2}$ l?
3. Za 4 m sukna zapłacono 72 zł; ile należy zapłacić za:
a) $1\frac{1}{2}$ m, b) 3,2 m, c) 6,5 m?
4. Za 5 cytryn zapłacono 75 gr; ile cytryn można kupić za:
a) $1\frac{1}{2}$ zł, b) 1 zł 20 gr, c) 1,05 zł?
5. Za 3 kg soli zapłacono 1 zł 20 gr; ile kg soli można kupić za:
a) 4 zł 40 gr, b) 3 zł, c) 4,7 zł?
6. a) 12 l mleka kosztuje 2,40 zł; ile kosztuje 8 l mleka?

Rozwiązanie: 4 l mleka kosztuje 2,40 zł: $3 = 0,80$ zł, więc 8 l mleka kosztuje $2 \cdot 0,80$ zł = 1,60 zł.

b) 9 kg towaru kosztuje 2,70 zł: ile kosztuje 15 kg tego towaru?

Rozwiązanie: 3 kg kosztuje 2,70 zł: $3 = 0,90$ zł; więc 15 kg kosztuje $5 \cdot 0,90$ zł = 4,50 zł.

Rozwiąż w powyższy sposób następujące zadania:

- c) 24 kg towaru kosztuje 12 zł; ile kosztuje 16 kg?
 - d) 18 kg towaru kosztuje 27 zł; ile kosztuje 24 kg?
 - e) 28 kg towaru kosztuje 33,60 zł; ile kosztuje 21 kg?
 - f) 14 kg towaru kosztuje 350 zł; ile kosztuje 105 kg?
 - g) 45 robotnikom wypłacono 270 zł, jaką kwotę należy wypłacić 30 robotnikom?
 - h) 12 arkuszy papieru kosztuje 42 gr; ile kosztuje 16 arkuszy? ile arkuszy można kupić za 35 gr, a ile za 1,12 zł?
7. Na wyżywienie 8 osób zakupiono 30 kg mąki i 40 kg mięsa; ile potrzeba kg mąki i ile kg mięsa na wyżywienie 15 osób przez ten sam przeciąg czasu?
 8. 5 górników wydobywa dziennie 9 tonn węgla; ile tonn węgla wydobydzie w jednym dniu 9 górników?
 9. Ile zarobi w ciągu 5 tygodni robotnik, który zarabia w ciągu 7 tygodni 364 zł?
 10. 18 robotników zarobiło w pewnym czasie 1314 zł; ilu robotników zarobiłoby w tymże czasie 2044 zł?
 11. Na towarze kupionym za 3000 zł zyskał kupiec 450 zł; ile zł zyskał na towarze kupionym za 250 zł?

12. Kupiec sprzedał towaru za 160 zł i zarobił 45 zł; za ile musiałby sprzedać tego towaru, żeby zarobić 261 zł?
13. Pociąg przebył 350 km w 7 godz.; jaką drogę zrobi w 12 godz., jadąc z tą samą prędkością? Ile czasu zużyje na przebycie 1000 km?
14. 4° Reamur'a wynoszą tyle, co 5° Celsjusza; ile stopni C wynoszą: 5°, 8°, 17°, 35°, 62, 73,6° R. Ile stopni R. wynoszą: 9°, 12°, 15°, 19,5°, 72° C.?
15. Za 50 dolarów zapłacono 332 zł 50 gr; ile dolarów zakupiono za 53 zł 13 gr? Ile zapłacono za 14 dolarów?
16. 100 franków francuskich kosztuje 34 zł 86 gr; zamień na franki 732 zł 6 gr! Zamień na złote 75 franków!
17. 25 m drutu waży 3,85 kg; jak długi jest drut o wadze 12,782 kg?
18. Wahadło robi w 5 sekundach 12 wahań; ile wahań robi na minutę? Ile czasu potrzebuje na wykonanie 100 wahań?
19. Koło robi 7296 obrotów w 2 godz. 32 min.; ile obrotów robi w 4 godz. 15 min.? W jakim czasie robi 1000 obrotów?
20. Przednie koło robi 60 obrotów, gdy równocześnie tylne robi 45 obrotów; ile obrotów wykona przednie koło, gdy tylne robi 81 obrotów, a ile wykona tylne koło, gdy przednie robi 96 obrotów?
21. Następujące tabelki uzupełnij liczbami tak, aby tabelki te przedstawiały liczby wprost proporcjonalne.

2	$2\frac{1}{2}$
4	

3	
5	$\frac{2}{3}$

	$\frac{3}{4}$
11	$2\frac{1}{2}$

0,4	$\frac{2}{7}$
	2,5

22. Odległość miejscowości A od B wynosi 9 km, na mapie zaś odległość ta wynosi 12 cm. Jaka jest odległość miejscowości C od D, jeśli na tej samej mapie odczytana wynosi 15 cm? W jakiej skali mapa jest zrobiona?
23. Pociąg w 20 min. przebiega 24 km; w jakim czasie przebiegnie 90 km? Jaką drogę przebiegnie w $1\frac{1}{4}$ godz.?
24. Oświetlenie sali 5 żarówkami kosztuje dziennie 1 zł 20 gr; ile kosztowałoby dziennie oświetlenie tej sali 8 żarówkami?
25. Światło przebiega drogę od słońca do ziemi, wynoszącą 150 000 000 km w 8 min. 18 sek.; jak odległa jest od ziemi gwiazda, z której światło dochodzi do ziemi po 4 latach?
26. Głos przebiega 1 km w 3 sek.; w jakiej odległości od nas uderzył piorun, gdy huk usłyszeliśmy po upływie 17 sek. od ujrzenia błyskawicy?

27. Za naprawę 100 m drogi żąda przedsiębiorca 240 zł; ile trzeba zapłacić za naprawę 1870 m drogi?
28. Potrzeba 10 000 kg (t. j. jednego wagonu) blendy smolistej dla wydobywania 40 mg radu; ile blendy potrzeba na 1 g radu?
29. 5 cm³ lodu o temperaturze 0° C waży 4,584 g; ile waży bryła lodu o objętości 1 m³ 53 cm³?
30. W wycieczkach górskich liczy się przeciętnie na 1 godz. czasu 275 m drogi w górę; ile czasu potrzeba na wejście na szczyt o wysokości (licząc od podstawy): a) 1100 m, b) 412,5 m czyli 275 m + $\frac{275}{2}$ m, c) 962,5 m, d) 1375 m?
31. Na długości 6 km droga wzniosła się o 102 m; o ile wznosi się przeciętnie na długości: a) 1 $\frac{1}{2}$ km, b) 5 km, c) 3 $\frac{1}{2}$ km?
32. Na przestrzeni 342 km, lokomotywa ciągnąca pociąg towarowy, zużyła 5 tonn węgla; ile tonn zużywa przeciętnie na 100 km?
33. 15 m sukna kosztuje 300 zł; ile kosztują 4 m sukna?

Rozwiążemy to zadanie w następujący sposób:

Zapiszmy je:

$$\begin{array}{r} 15 \text{ m} - 300 \text{ zł} \\ 4 \text{ m} - x \text{ zł} \end{array}$$

Szukaną liczbę zł oznaczyliśmy literą x . Liczba m i liczba zł są wielkościami wprost proporcjonalnymi. Ilorazy odpowiadających sobie liczb muszą być sobie równe, równają się bowiem współczynnikowi proporcjonalności. Liczbie 15 odpowiada liczba 300, liczbie zaś 4 odpowiada szukana liczba x .

Mamy zatem: $x : 4 = \frac{300}{15}$ czyli $x : 4 = 20$.

Ponieważ szukana liczba jest dzielną, więc $x = 20 \cdot 4 = 80$.

4 m sukna kosztują zatem 80 zł.

Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: a) 9 m, b) 17 m, c) 40 m, d) 18 $\frac{1}{2}$ m.

34. 1000 l benzyny kosztuje 760 zł; ile kosztuje 635 l benzyny? Rozwiążemy to zadanie t. zw. metodą włoską czyli kupiecką.

Rozwiązanie:

500 l benzyny kosztuje	760 zł : 2 = 380 zł
100 l " "	760 zł : 10 = 76 zł
10 l " "	76 zł : 10 = 7 zł 60 gr
20 l " "	2 · 7 zł 60 gr = 15 zł 20 gr
5 l " "	380 zł : 100 = 3 zł 80 gr
Razem 635 l benzyny kosztuje	482 zł 60 gr

Oblicz w podobny sposób, ile kosztuje: a) 725 l, b) 245 l, c) 821 l, d) 57 l?

35. 7 l mleka daje 1,05 l masła; ile l masła otrzymamy z $24\frac{3}{5}$ l mleka?

Rozwiążemy to zadanie metodą włoską.

21 l	mleka	daje	masła	$3 \cdot 1,05 \text{ l} = 3,15 \text{ l}$
1 l	"	"	"	$1,05 \text{ l} : 7 = 0,15 \text{ l}$
2 l	"	"	"	$2 \cdot 0,15 \text{ l} = 0,30 \text{ l}$
$\frac{1}{5} \text{ l}$	"	"	"	$0,15 \text{ l} : 5 = 0,03 \text{ l}$
$\frac{2}{5} \text{ l}$	"	"	"	$2 \cdot 0,03 \text{ l} = 0,06 \text{ l}$

Razem $24\frac{3}{5}$ l mleka daje masła 3,69 l

Oblicz w ten sposób, ile l masła otrzymasz z: a) $15\frac{3}{4}$ l mleka, b) $22\frac{1}{2}$ l mleka, c) $33\frac{3}{5}$ l mleka?

36. Za przewóz $\frac{3}{2}$ t towaru zapłacił kupiec 150 zł 30 gr; ile zapłaci za przewóz 5 t towaru? Oblicz metodą włoską!
37. Pewien kapitał przynosi w 8 miesiącach 1680 zł dochodu; jaki dochód przyniesie w: a) 20 miesiącach, b) $2\frac{1}{2}$ latach, c) $1\frac{1}{2}$ roku? Oblicz metodą włoską!
38. 1 m² blachy (pewnej grubości) waży 20 kg; jakie pole ma blacha, której ciężar wynosi: a) 115 kg, b) 85 kg, c) 162 kg? Oblicz metodą włoską!
39. W głębokości 350 m jest temperatura 33° C, a w głębokości 25 m — 8° C; w jakiej głębokości jest temperatura 21° C, jeśli przyjmiemy, że (począwszy od 25 m) przyrost temperatury jest wprost proporcjonalny do przyrostu głębokości?
40. Obwód koła podzielono na 360 równych części, tak zwanych stopni łukowych, każdy stopień na 60 minut łukowych, każdą minutę na 60 sekund łukowych; jak długi jest łuk 12° 30' 15", jeśli obwód tego koła ma 180 m?
41. 1 kg towaru kosztuje 3 zł; niech x kg towaru kosztuje y zł.

Możemy więc napisać: 1 kg — 3 zł,

$$\underline{x \text{ kg} — y \text{ zł.}}$$

Ponieważ te wielkości są wprost proporcjonalne, więc

$$\text{Stąd} \quad y : 3 = x : 1 = x.$$

$$y = 3x.$$

Widzimy zatem, że wielkości x i y wprost do siebie proporcjonalne, spełniają równość: $y = 3x$.

Liczba 3 jest współczynnikiem proporcjonalności.

Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć cenę (y zł) każdej ilości towaru (x kg).

Np. 8 kg tego towaru kosztuje $8 \cdot 3 \text{ zł} = 24 \text{ zł}$.

Uwaga. Jeśli wielkości x i y , od siebie zależne i zmienne, spełniają np. równość:

$$y = 12x$$

to wielkości x i y są do siebie wprost proporcjonalne.

Ile razy bowiem zwiększymy (lub zmniejszymy) liczbę x , tyle razy zwiększy się także (lub zmniejszy) liczba y .

a) Robotnik zarabia dziennie 6 zł; niech x oznacza liczbę dni pracy, y zaś liczbę zł, jako wynagrodzenie za tę pracę. Jaki wzór na y otrzymasz? Oblicz na podstawie tego wzoru zarobek robotnika w 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 dniach! Tabelka!

b) Pociąg jedzie z prędkością 15 m na sekundę; niech x oznacza liczbę sekund, y zaś liczbę m, jaką pociąg w tym czasie przejechał. Jaki wzór otrzymasz na y ? Oblicz na podstawie tego wzoru drogę, jaką pociąg przejedzie w 2, 5, 8, 10, 12, 18 sekundach, w 1, 2, 3, minutach!

c) Wysokość prostokąta wynosi 3 cm, podstawa x cm, pole zaś y cm². Jaki wzór otrzymasz na y ? Oblicz, na podstawie tego wzoru, powierzchnię prostokąta, w którym podstawa ma 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 8 cm, 15 cm. Tabelka!

Wielkości odwrotnie proporcjonalne

Określenia

1. Ile m płótna kupimy za 60 zł? Odpowiedź zależy będzie od tego, ile kosztuje 1 m.

Jeżeli 1 m kosztuje 1 zł, to kupimy 60 m; gdyby 1 m kosztował dwa razy więcej, t. j. 2 zł, to kupilibyśmy 2 razy mniej t. j. 30 m płótna; gdyby 1 m kosztował 3 razy więcej (niż w pierwszym przypadku) t. j. 3 zł, to kupilibyśmy trzy razy mniej (niż w pierwszym przypadku) t. j. 20 m i t. d.

Wyniki zaznaczone mamy w tabelce na rys. 27.

Cena 1 m płótna w zł...	1	2	3	4	5	6
Liczba m kupiona za 60 zł	60	30	20	15	12	10

Rys. 27.

Weźmy pod uwagę dwa gatunki płótna np. jeden w cenie 2 zł za 1 m, drugi w cenie 4 zł za 1 m. Z tabelki widzimy, że za 60 zł można kupić:

30 m płótna po 2 zł za 1 metr lub
 15 " " " 4 " " 1 "

Z powyższego widać, że za 60 zł kupimy dwa razy więcej (t. j. $\frac{30}{15}$) płótna pierwszego gatunku, niż drugiego. Dwa razy musi być też większa cena drugiego gatunku, niż pierwszego. A więc:

$$\frac{30}{15} = 2.$$

Ułamek $\frac{30}{15}$ jest wykładnikiem stosunku ilości płótna obu gatunków. Ułamek $\frac{2}{1}$ jest wykładnikiem stosunku odpowiednich cen. Ponieważ ułamek $\frac{1}{2}$ jest odwrotnością ułamka $\frac{2}{1}$ więc: wykładnik stosunku ilości dwóch gatunków płótna (które kupimy za tę samą sumę) jest równy odwrotności wykładnika stosunku ich cen za 1 m.

Mówimy, że liczba metrów płótna, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest odwrotnie proporcjonalna do ceny 1 m tego płótna.

Podobnie rzecz przedstawia się z innymi towarami. Jeżeli cena 1 kg jakiegoś towaru jest 2, 3, ... razy większa niż drugiego, to za tę samą kwotę pieniędzy (np. za 60 zł) kupimy 2, 3, ... razy mniej pierwszego towaru, niż drugiego.

Mówimy, że liczba kg towaru, jaką możemy kupić za pewną kwotę, jest odwrotnie proporcjonalna do ceny 1 kg tego towaru.

Uwaga. Jeżeli 1 m płótna kosztuje 3 zł, to 20 m kosztuje:

$$20 \cdot 3 \text{ zł} = 60 \text{ zł}.$$

Mnożąc więc liczbę m , przez cenę 1 m otrzymujemy kwotę wydaną. Wynika stąd, że mnożąc przez siebie odpowiednie liczby w tabelce (rys. 27), otrzymamy 60. Zatem:

$$1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = 4 \cdot 15 = 5 \cdot 12 = 6 \cdot 10 = 60.$$

Jeżeli mamy taką tabelkę, jak na rys. 27, mającą tę własność, że iloraz dwóch liczb pierwszego wiersza jest równy odwrotności ilorazu odpowiednich liczb wiersza drugiego, wówczas mówimy, że liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza.

Przykłady takich tabelek podają nam rys. 28 i 29.

1	2	3	4
2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Rys. 28.

3	2	9	6
6	9	2	3

Rys. 29.

W tabelkach powyższych liczbom 2, 3 razy większym odpowiadają liczby 2, 3 razy mniejsze. Widzimy również, że iloczyn odpowiednich liczb jest ten sam. Np. (rys. 28)

$$1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = 3 \cdot \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{1}{2}.$$

2. Jeżeli 1 robotnik wystawi mur w 12 dniach, to 2 robotników wykona tę pracę w czasie 2 razy krótszym t. j. w 6 dniach, 3 robotników w czasie 3 razy krótszym t. j. w 4 dniach, 6 robotników — w 2 dniach, 12 robotników w 1 dniu. Widzimy zatem, że czas potrzebny na wykonanie pewnej pracy zależy od liczby robotników w ten sposób, że 2, 3, 4 razy więcej robotników wykona tę samą pracę w czasie odpowiednio 2, 3, 4 razy krótszym.

Mówimy, że czas, potrzebny do wykończenia pewnej pracy, jest odwrotnie proporcjonalny do liczby robotników.

Iloczyn odpowiednich liczb wynosi 12, gdyż

$$1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4 = 6 \cdot 2 = 12.$$

Mówimy, że do wystawienia muru potrzeba 12 dni roboczych.

3. Na tabelce zaznaczone mamy czasy zużyte na przebycie 60 m drogi, przy odpowiednich prędkościach.

Prędkość t. j. droga przebyta w 1 sek. podana w <i>m</i>	Pociąg osobowy 10	Pociąg pośp. 20	Samo- chód 30	Samolot 40	Kula ka- rabinowa 600
Czas zużyty na przebycie 60 m podany w sek.	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$

Z tabelki powyższej widzimy, że pociąg pośpieszny, jadący z prędkością dwa razy większą niż pociąg osobowy, przebywa tę samą drogę w czasie dwa razy krótszym; samochód, jadący z szybkością trzy razy większą niż pociąg osobowy, przebywa tę drogę w czasie trzy razy krótszym i t. d.

Czas potrzebny na przebycie pewnej drogi jest wielkością odwrotnie proporcjonalną do prędkości.

Iloczyn odpowiednich liczb wynosi 60 mamy bowiem:

$$6 \cdot 10 = 3 \cdot 20 = 2 \cdot 30 = 1\frac{1}{2} \cdot 40 = \frac{1}{10} \cdot 600 = 60.$$

Iloczyn ten przedstawia w *m* drogę przebytą.

W przykładach 1, 2, 3 występowały dwie wielkości od siebie zależne: 1) liczba *m* płótna (jaką możemy kupić za pewną kwotę pieniędzy np. za 60 zł) zależy od ceny 1 *m* płótna; 2) czas potrzebny do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników; 3) czas potrzebny na przebycie pewnej drogi zależy od prędkości.

Wielkości występujące w każdym z powyższych przykładów nazwalimy odwrotnie proporcjonalnymi.

Aby się przekonać, czy dwie wielkości zależne od siebie są odwrotnie proporcjonalne, należy zbadać:

1) czy zwiększając jedną, tem samem zmniejszamy drugą;

2) czy zwiększając jedną 2, 3...razy, tem samem zmniejszamy drugą odpowiednio 2, 3... razy.

Zadania

1. W następujących zadaniach sporządź odpowiednie tabelki i przekonaj się, że liczby jednego wiersza są odwrotnie proporcjonalne do liczb drugiego wiersza. Wskaż następnie w każdym zadaniu te wielkości, których proporcjonalność wynika z tabelki. Oblicz iloczyn odpowiednich liczb i podaj co oznaczają. Sporządź wkońcu wykres graficzny w odpowiedniej skali!
 - a) Jeżeli 30 robotników wykonuje pewną pracę w 1 dniu, to ilu robotników wykona tę pracę w: a) 2, b) 3, c) 5, d) 6, e) 10, f) 15 dniach?
 - b) Jeżeli pewien odcinek podzielimy na 12 równych części, to taka część wynosi 1 cm; jaka jest długość części, jeśli dany odcinek podzielimy na: a) 3, b) 4, c) 6, d) 24, e) 120 równych części?
 - c) Jeśli koło na pewnej drodze zrobiło 100 obrotów, to ile obrotów na tej samej drodze wykona koło o obwodzie: a) 2, b) 3, c) 4 razy mniejszym, e) 2, f) 4, g) 25 razy większym?
 - d) Wiedząc, że w 1 sekundzie człowiek pływający robi drogę 1 m, w chodzie 1,5 m, wioślarz 2 m, człowiek w biegu 3 m, na rowerze 6 m, oblicz kolejno czasy, potrzebne na przebycie drogi 60 m!
2. Narysuj prostokąty o polu 6 cm^2 i o podstawie: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm; przekonaj się, że wysokości są odwrotnie proporcjonalne do podstawy!
3. Narysuj trójkąty o polu 4 cm^2 i o wysokości: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm; przekonaj się, że podstawy są odwrotnie proporcjonalne do wysokości!
4. Jeden robotnik wykona pewną pracę w tygodniu, pracując dziennie 6 godzin; ile godzin dziennie musi pracować: a) 2, b) 3, c) 4, d) 5, e) 6 robotników, aby tę pracę również w tygodniu wykonać? Przekonaj się, że liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy!
5. Iloczyn wynosi 30; czy mnożna jest odwrotnie proporcjonalna do mnożnika?
6. Dzielną wynosi 60; czy wartość ilorazu jest odwrotnie proporcjonalna do dzielnika?
7. Czy wartość ułamka o liczniku 6 jest odwrotnie proporcjonalna do mianownika?

Reguła trzech prosta

(Dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych)

Pewną pracę wykonało 20 robotników w 18 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 12 robotników?

Zadanie to rozwiążemy dwoma sposobami:

I. 20 robotników potrzebuje 18 dni, 1 robotnik potrzebuje 20 razy więcej dni, t. j. 360 dni, 12 robotników potrzebuje 12 razy mniej dni, t. j. 30 dni.

A więc 12 robotników wykona powyższą pracę w 30 dniach.

II. Oznaczając przez x liczbę dni, w których 12 robotników wykona pracę, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

Pewną pracę wykona:

20 robotników w 18 dniach

12 robotników w x dniach

Wykładnikiem stosunku liczby robotników jest ułamek $\frac{20}{12}$; wykładnikiem stosunku odpowiednich dni pracy jest iloraz $18:x$. Ponieważ liczba robotników jest odwrotnie proporcjonalna do liczby dni potrzebnych do wykonania danej pracy, więc odwrotność ułamka $\frac{20}{12}$ równa się ilorazowi $18:x$.

Zatem $\frac{12}{20} = 18:x$

Stąd $x = 18 : \frac{12}{20} = 30$.

A więc 12 robotników wykona pracę w 30 dniach.

Zadania

1. 12 robotników wykona pewną pracę w $2\frac{1}{2}$ dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 15 robotników?
2. 30 robotników wykona pewną pracę w 16 godzinach; ilu robotników wykona tę samą pracę w 12 godzinach?
3. Pewien zapas żywności wystarczy dla 6 ludzi na 10 dni; na ile dni starczy tenże zapas dla 4 ludzi?
4. Pewien zapas żywności wystarczy dla 16 ludzi na 35 dni; dla ilu ludzi wystarczy ten zapas na 28 dni?
5. Pociąg, jadący z prędkością 50 km na godzinę, przebywa pewną drogę w $7\frac{1}{2}$ godzinach; z jaką prędkością musiałby jechać pociąg, aby tę samą drogę przebyć w 6 godzinach?
6. Dla przebycia pewnej drogi musi piechur zrobić 1440 kroków, każdy o długości $\frac{3}{4}$ m; ile kroków musiałby zrobić piechur, gdyby długość każdego kroku wynosiła 80 cm?
7. Kupiono 1000 dolarów złotych, płacąc 8 zł 92 gr za 1-go do-

lara; ileby kupiono dolarów za tę samą kwotę, gdyby 1 dolar złoty kosztował 9 zł?

8. Zarządca majątku otrzymał pewną kwotę pieniędzy, by wypłacić 72 robotnikom zarobek tygodniowy (t. j. 6 dniowy). Pokazało się jednak, że było zatrudnionych 108 robotników; iludniowy zarobek może im zarządca wypłacić?
9. Posłaniec, idąc z prędkością $4\frac{1}{2}$ km na 1 godzinę, odbywa drogę z miejscowości A do B w 6 godzinach; ile km musi robić w 1 godzinie, skoro ma przebyć tę drogę w 5 godzinach?
10. Stefek, chcąc sobie sprawić raketę tenisową, musiałby składać na ten cel przez 3 miesiące po 40 gr dziennie; po ile musi składać, jeżeli chce kupić raketę po 2 miesiącach?
11. Gdy rurą wpływa 21 l wody na minutę, to zbiornik napełni się w 12 godzinach; ile musiałoby wpływać wody na minutę, by zbiornik napełnił się w 9 godzinach? W jakim czasie na pełniłby się zbiornik, gdyby rurą wpływało 36 l wody na minutę?
12. Przednie koło u wozu ma 3 m obwodu, tylne zaś $3\frac{1}{2}$ m; ile obrotów zrobiło w czasie jazdy tylne koło, gdy przednie zrobiło 460 obrotów?
13. Pewną sumę podzielono równo między 7 osób, przyczem każda otrzymała 30 zł; ile otrzymałaby każda osoba, gdyby tę sumę podzielono równo między 15 osób? Między ile osób należałoby podzielić tę sumę, chcąc, aby każda otrzymała po 21 zł?
14. Pewien odcinek podzielono na 12 równych części, o długości 8 cm; na ile równych części należałoby podzielić ten odcinek, aby każda część miała długość 6 cm? Jakiej długości byłaby każda część, gdyby odcinek nasz podzielono na 64 równych części?
15. 20 robotników wykona pewną pracę w 18 dniach; w ilu dniach wykona tę samą pracę 15 robotników?

Rozwiązanie: 5 robotników wykona tę pracę w czasie: $4 \cdot 18 \text{ dni} = 72 \text{ dni}$. Zatem 15 robotników wykona tę pracę w czasie 3 razy krótszym, t. j. $72 \text{ dni} : 3 = 24 \text{ dni}$.

Rozwiąż w podobny sposób następujące zadania:

a) 9 robotników wykona pewną pracę w 24 dniach; w ilu dniach wykona tę pracę 12 robotników?

b) Zadania: 1, 2, 3 i 4.

a) Książka ma 245 stron, a na każdej 40 wierszy; ile wierszy należałoby pomieścić na każdej stronie, aby ta książka miała 280 stron?

16. Kąt 42° mieści się w pewnym kącie 6 razy; ile razy mieści się w tym kącie kąt 36° ?
17. Dwa prostokąty mają równe pola; jeden z tych prostokątów ma podstawę 8 cm, wysokość 4 cm, drugi zaś ma podstawę: a) 6 cm, b) 10 cm, c) $7\frac{1}{2}$ cm. Jaka jest wysokość drugiego prostokąta? Rysunek!
18. Na pokrycie mebli potrzeba 24,5 m materji, szerokiej na 2 m; ile potrzeba metrów materji, szerokiej na 1,8 m?
19. 20 robotników ukończy pewną pracę w 18 dniach; w ilu dniach ukończyłoby tę pracę 12 robotników?
Rozwiążemy to zadanie w następujący sposób:
Zapiszmy je: 20 robotników — 18 dni

$$\begin{array}{ccc} 12 & \text{„} & - \quad x \quad \text{„} \\ \hline \end{array}$$

Szukaną liczbę dni oznaczyliśmy literą x . Ponieważ liczba robotników i liczba dni pracy są wielkościami odwrotnie proporcjonalnymi, więc iloczyny odpowiadających sobie liczb muszą być sobie równe. Liczbie 20 odpowiada liczba 18, liczbie zaś 12 odpowiada szukana liczba x .

Mamy zatem: $x \cdot 12 = 18 \cdot 20$,
więc $x \cdot 12 = 360$.

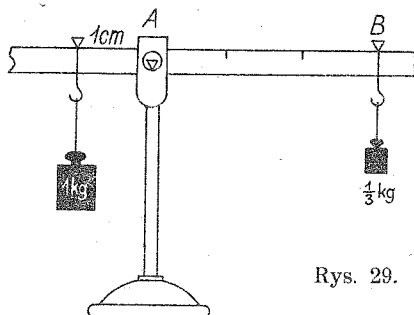
Ponieważ szukana liczba jest mnożnikiem, więc

$$x = 360 : 12 = 30.$$

Widzimy, że 12 robotników wykona pracę w 30 dniach. Oblicz w podobny sposób, w ilu dniach ukończyłoby pracę: a) 5 robotników, b) 8 rob., c) 10 rob., d) 18 rob., e) 24 rob.

20. Z pewnej ilości wełny można otrzymać 72 m sukna, szerokiego na $1\frac{1}{4}$ m; a) ile m sukna, szerokiego na $2\frac{1}{4}$ m, można otrzymać z tej samej ilości wełny? b) jak szerokie będzie sukno, jeśli jego długość wyniesie 63 m?
21. Na pokrycie dachu zużyto 3500 dachówek, przyczem pole dachówki wynosiło $3,6 \text{ dcm}^2$; ile dachówek zużyłoby na pokrycie tego dachu, jeśli pole dachówki wynosiło 4 dcm^2 ?
22. Dwa trójkąty mają równe pola; jeden z nich ma podstawę 6 cm, wysokość 4 cm; drugi zaś ma:
a) podstawę: a) 8 cm, b) 6 cm, c) 3 cm; jaka jest wysokość drugiego trójkąta?
b) wysokość: a) 2 cm, b) 5 cm, c) 3 cm; jaka jest podstawa drugiego trójkąta? Rysunek!

23. Na rys. 29 mamy dźwignię, t. j. belkę sztywną, która może obracać się około punktu A . Po lewej stronie belki zawieszono ciężar 1 kg w odległości 1 cm od punktu A . Ciężar ten mo-



Rys. 29.

żemy zrównoważyć, wieszając w dowolnym punkcie B (po prawej stronie) odpowiedni ciężarek. Doświadczenie uczy, że: a) wielkość tego ciężarka jest odwrotnie proporcjonalna do odległości AB ; b) ciężarek ten równa się 1 kg , jeśli AB ma 1 cm .

a) Jaki ciężarek należy powiesić, jeśli AB ma długość: 2 cm , $2\frac{1}{2}\text{ cm}$, $3\frac{3}{4}\text{ cm}$, 4 cm , 5 cm , $\frac{1}{2}\text{ cm}$, $\frac{3}{4}\text{ cm}$?

b) Ile wynosi AB , jeśli ciężarek ma: 1 kg , $\frac{1}{2}\text{ kg}$, $\frac{3}{4}\text{ kg}$, 200 g , 2 kg ?

Do zadań a) i b) sporządź tabelkę i wykres w odpowiedniej skali!

24. 1 robotnik wykona pewną pracę w 24 dniach; niech x robotników wykona tę pracę w y dniach.

Możemy więc napisać:

1 robotnik		w 24 dniach
x „		w y „

Ponieważ te wielkości są odwrotnie proporcjonalne, więc iloczyny odpowiednich liczb są równe.

Zatem $x \cdot y = 1 \cdot 24$ czyli $x y = 24$.

Stąd $y = 24 : x$ czyli $y = \frac{24}{x}$.

Widzimy zatem, że wielkości x i y , odwrotnie do siebie proporcjonalne, spełniają równość: $y = \frac{24}{x}$.

Na podstawie tego wzoru możemy obliczyć liczbę dni y potrzebną na wykonanie pewnej pracy przez x robotników.

Np : 2 robotników wykona tę pracę w $\frac{24}{2} = 12$ dniach.

Uwaga. Jeśli wielkości x i y , od siebie zależne i zmienne, spełniają np. równość: $y = \frac{10}{x}$, to wielkości x i y są do siebie odwrotnie proporcjonalne. Ile razy bowiem zwiększymy (lub zmniejszymy) liczbę x , tyle razy zmniejszy się także (lub zwiększy) liczba y .

a) 60 robotników wykona pewną pracę w 1 dniu; niech y oznacza liczbę robotników, którzy wykonają tę pracę w x dniach. Jaki otrzymasz wzór na y ? Oblicz na podstawie tego wzoru liczbę robotników, którzy wykonają tę pracę w 2, 3, 4, 5, 6, 12, 15, 30 dniach. Tabelka!

b) Koło na pewnej drodze wykonało 300 obrotów; niech y obrotów wykona na tej drodze koło o obwodzie x razy większym (względnie mniejszym). Jaki otrzymasz wzór na y ? Oblicz na podstawie tego wzoru liczbę obrotów na tej drodze koła 2, 3, 4, 5 razy większego i 2, 3, 4, 5 razy mniejszego. Tabelka!

c) Pole prostokąta wynosi 30 cm^2 , podstawa ma $x \text{ cm}$, wysokość zaś $y \text{ cm}$. Jaki wzór otrzymasz na y ? Oblicz na podstawie tego wzoru wysokość prostokąta, wiedząc, że podstawa wynosi 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm. Tabelka!

Wielkości zależne od kilku innych

Zadanie: 16 robotników wykonało pewną pracę w 15 dniach, pracując po 9 godzin dziennie; w ilu dniach wykonaloby tę pracę 12 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie?

Rozwiązanie: Przyjmujemy najpierw stałą liczbę godzin dziennej pracy, a mianowicie 9 godzin pracy.

Rozumujemy:

jeśli 16 robotników wykona pracę w 15 dniach,
to 1 robotnik wykona pracę w $16 \cdot 15$ dniach,
a 12 robotników wykona pracę w $\frac{16 \cdot 15}{12}$ dniach.

Przyjmujemy teraz stałą liczbę robotników, a mianowicie 12 robotników i rozumujemy:

jeśli przy 9-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{16 \cdot 15}{12}$ dni,
to przy 1-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{16 \cdot 15 \cdot 9}{12}$ dni,
a przy 8-godzinnej dziennie pracy potrzeba $\frac{16 \cdot 15 \cdot 9}{12 \cdot 8}$ dni,
t. j. $22\frac{1}{2}$ dnia.

Zatem 12 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, potrzebuje $22\frac{1}{2}$ dnia na wykonanie zadanej pracy.

Wynik ten otrzymaliśmy, rozwiązując 2 zadania z reguły trzech prostej. Ten sposób rozwiązywania nazywamy regułą trzech złożoną.

Zwyczajnie układa się następujący schemat rozwiązywania:

$$\begin{array}{l} 16 \text{ rob. — } 9 \text{ godz. — } 15 \text{ dn.} \\ 1 \text{ rob. — } 9 \text{ godz. — } 16.15 \text{ dn.} \\ \left| \begin{array}{l} 12 \text{ rob. — } 9 \text{ godz. — } \frac{15 \cdot 16}{12} \text{ dn.} \\ 12 \text{ rob. — } 1 \text{ godz. — } \frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12} \text{ dn.} \\ 12 \text{ rob. — } 8 \text{ godz. — } \frac{15 \cdot 16 \cdot 9}{12 \cdot 8} \text{ dn.} \end{array} \right. \end{array}$$

W zadaniu powyższem występowały następujące wielkości: liczba robotników, liczba dni pracy i liczba godzin pracy dziennej. Liczba dni potrzebna do wykonania pewnej pracy zależy od liczby robotników i liczby godzin dziennej pracy.

Przy tej samej liczbie godzin dziennej pracy, dwa, trzy... razy więcej robotników wykona pracę w dwa, trzy... razy mniejszej liczbie dni. Ta sama liczba robotników, pracując dwa, trzy... razy więcej godzin dziennie, wykona pracę w dwa, trzy... razy mniejszej liczbie dni.

Mówimy, że liczba dni pracy jest odwrotnie proporcjonalna do liczby robotników i odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennej pracy.

Podamy teraz inne przykłady, w których jedna wielkość zależy od kilku innych wielkości:

1. Pole prostokąta zależy od długości podstawy i wysokości. Jeżeli podstawę kilka razy powiększymy, nie zmieniając wysokości, to tyleż razy powiększy się pole. Jeżeli kilka razy powiększymy wysokość, nie zmieniając podstawy, to tyleż razy powiększy się pole.

Pole prostokąta zależy zatem w ten sposób od podstawy i wysokości, że jest wprost proporcjonalne do długości podstawy (przy tej samej wysokości) i wprost proporcjonalne do długości wysokości (przy tej samej podstawie).

2. Liczba dni marszu zależy od długości drogi i od liczby godzin dziennego marszu. Liczba dni marszu jest wprost proporcjonalna do długości drogi przy tej samej liczbie godzin dziennego

marszu, a odwrotnie proporcjonalna do liczby godzin dziennego marszu przy tej samej długości drogi.

Zadania

- 18 robotników zarabia w 5 dniach 630 zł; ile zarobi 27 robotników w 6 dniach?
- 7 robotników zarabia w 13 dniach 638 zł 82 gr; ilu robotników zarobi 1053 zł w 15 dniach?
- 5 robotników zarabia w 7 dniach 254 zł 10 gr; w ilu dniach 11 robotników zarobi 638 zł 88 gr?
- Piechur, idący przez 12 dni po 5 godzin dziennie, przechodzi 270 km; ile km przejdzie, idąc przez 16 dni po $5\frac{1}{2}$ godzin dziennie?
- 15 robotników, pracujących po 9 godzin dziennie, wykopałoby w 4 dniach rów 100 m długi; w ilu dniach wykopie 9 robotników, pracujących po 8 godzin dziennie, rów długości 120 m?
- Wykopanie rowu 15 m długości, 2 m szerokości i $\frac{3}{4}$ m głębokości kosztuje 135 zł; jakiej długości jest rów, którego wykopanie kosztuje 270 zł, a który ma $2\frac{1}{4}$ m szerokości i 80 cm głębokości?
- Zapas chleba starczy dla 324 ludzi na 17 dni, jeżeli wydziela się dziennie po $\frac{3}{4}$ kg na osobę; na ile dni wystarczy ten zapas chleba dla 306 ludzi, otrzymujących dziennie $\frac{1}{2}$ kg na osobę?
- 316 latarni, palących się po 7 godzin dziennie, zużywa w 24 dniach 7963,2 m³ gazu; ile latarni, palących się po 9 godzin dziennie, zużyje w ciągu 27 dni 15 199,65 m³ gazu?
- Koło o obwodzie 3 m przejechało w 10 minut 6 km; w ilu minutach przejedzie 8 km koło o obwodzie $2\frac{1}{2}$ m, jeśli w minucie obraca się tyle razy co poprzednie?
- Za $10\frac{1}{2}$ m sukna o szerokości $1\frac{1}{4}$ m zapłacono 120 zł 60 gr; ile zapłaconoby za $3\frac{1}{2}$ m tego sukna o szerokości $1\frac{1}{2}$ m?
- Chodnik 100 m długości, $4\frac{1}{2}$ m szerokości ułożono z 3600 płyt; jakiej długości chodnik możnaby ułożyć z 5400 takich płyt, jeżeliby szerokość jego miała wynosić 6 m?
- Zrobiono zapas siana na 40 tygodni dla 36 koni, licząc po $12\frac{1}{2}$ kg dziennie na konia; na jak długo wystarczyłby ten zapas siana dla 30 koni, jeśli dziennie wydawać się będzie 10 kg na konia?
- Z 12 kg przędzy otrzymuje się 130 m płótna, 0,75 m szerokiego; ile m płótna, szerokiego na 1,25 m, otrzymamy z 18 kg przędzy?

14. 7 monterów potrzebuje 6 dni na założenie przewodu elektrycznego 273 m długiego; w jakim czasie 5 monterów założy przewód 325 m długi?
15. Aby wypompować wodę z kopalni, potrzeba 20 pomp, pracujących przez 12 dni po 15 godzin dziennie. Po upływie 5 dni 4 pompy popsuły się, a pozostałe pompowały po 18 godzin dziennie: w jakim czasie wypompowano wodę?
16. 8 robotników zgodziło się wybrukować podwórze w 13 dniach; po 5 dniach, pracując 8 godzin dziennie, wykonali третią część pracy. Ile godzin przez pozostałe dni muszą dziennie pracować, aby na czas pracę wykończyć?
17. Dwóch robotników wykonało pewną pracę w 10 godzinach; jeden z robotników wykonałby sam tę pracę w 15 godzinach. W jakim czasie drugi robotnik wykonałby tę pracę?
18. Puszczając wodę jednym kurkiem można napęlnić basen w 2 godzinach, drugim zaś w 4 godzinach; jaki ułamek basenu napęlni się wodą, jeżeli oba kurki będą równocześnie otwarte przez $\frac{1}{2}$ godziny?

Procenty

Określenia

Przypuśćmy, że mamy dane dwie wielkości np. dwa odcinki AB i CD i że: $AB : CD = \frac{1}{5}$.

Przedstawmy ten wykładnik stosunku w postaci ułamka o mianowniku 100, a więc: $AB : CD = \frac{20}{100}$.

Zatem: $AB = \frac{20}{100} CD$.

Odcinek AB wynosi 20 setnych części odcinka CD . Mówimy, że AB jest 20 procent odcinka CD .

Podobnie, jeżeli: $AB : CD = \frac{1}{7}$ to, przedstawiając ten ułamek w postaci ułamka o mianowniku 100, otrzymamy:

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{100}{100} = \frac{14\frac{2}{7}}{100}$$

Zatem AB zawiera $14\frac{2}{7}$ setnych części odcinka CD , a więc AB wynosi $14\frac{2}{7}$ procent odcinka CD .

Widzimy stąd, że jednym procentem jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{100}$ tej wielkości. Dwa, trzy, pięć, półtora procent jakiejś wielkości są to odpowiednio $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{15}{100}$ tej wielkości.

Np. 5 procent 60 m = $\frac{5}{100}$ z 60 m = $\frac{5}{100} \cdot 60$ m = 3 m,

$\frac{1}{2}$ procent 1000 zł = $\frac{0.5}{100}$ z 1000 zł = $\frac{0.5}{100} \cdot 1000$ zł = 5 zł,

100 procent liczby 12 = $\frac{100}{100}$ z 12 = $\frac{100}{100} \cdot 12$ = 12.

Wyraz procent oznaczamy: %, a więc 7% oznacza 7 procent, $\frac{1}{2}\%$ oznacza pół procentu.

Przykłady.

1. Wino zawiera 15% alkoholu t. zn., że w 100 l wina zawartych jest 15 l alkoholu.
2. W lasach polskich jest 60% sosny, t. zn., że przeciętnie na 100 morgów lasu jest w tem 60 morgów sosny.
3. Polska produkuje 14,4% światowej produkcji ziemniaków, to znaczy, że ze zbiorów całego świata na 100 q ziemniaków wypada 14,4 q ziemniaków, pochodzących z Polski.
4. Księgarz, zakupując hurtownie książki, otrzymuje 30% opustu, czyli rabatu, to znaczy, że za towar wartości 100 zł płaci o 30 zł mniej, to jest płaci 70 zł.

Niechaj k oznacza jakąś liczbę, p zaś procent. Zapytajmy się, jaka to jest liczba d , która wynosi p procent liczby k .

Jedna setna część liczby k jest $k : 100$.

Ponieważ d zawiera p setnych części liczby k więc

$$d = p \cdot (k : 100) = (p k) : 100.$$

A więc $d = \frac{p k}{100}$.

Jeżeli więc $k = 12$, $p\% = 3\%$, więc $d = \frac{3 \cdot 12}{100} = 0,36$.

Zadania

1. Oblicz: 3% z 100, 15% z 20, $7\frac{1}{2}\%$ z 1000, 200% z $2\frac{1}{2}$, 1% z 700, 6% z 15 000, 50% z 72, $\frac{1}{10}\%$ z 10 000, 8% z 25, 10% z 40, 5% z 0,125, 100% z 7,23.
2. Oblicz: 2%, 3%, 4% z a) 257, b) 684, c) 960, d) 1256.
3. Oblicz: 3%, 4%, 8%, $7\frac{1}{2}\%$ z a) 420, b) 0,430, c) 1,862, d) 0,0421.
4. Ile to jest: 8% z 1 m, 4% z 1 kg, 12% z 1 km, 2% z 1 dm^2 , $3\frac{1}{2}\%$ z 1 m^3 , 75% z 1 l?
5. Ile to jest: 1%, 3%, $1\frac{1}{2}\%$, 8%, 11%, $5\frac{1}{2}\%$ kwoty 300 zł?
6. Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej 3% z 856.

Rozwiązanie: zaokrąglamy 856 do 900.

Ponieważ 3% z $900 = \frac{3 \cdot 900}{100} = 27$, więc w przybliżeniu 3% z 856 wynosi 27.

Podobnie liczymy w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej 4% z 0,00641.

Ponieważ $4\% \text{ z } 0,006 = \frac{4 \cdot 0,006}{100} = 0,00024$, więc $0,00024$ jest w przybliżeniu $4\% \text{ z } 0,00641$.

Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej: 1% , 2% , 3% , 4% , 5% , 8% z a) 645; b) 829; c) 1684; d) 20,83; e) 114,84; f) 0,0641; g) 0,00052.

7. Dlaczego: a) np. 5% liczby jest proporcjonalny do tej liczby, b) procent liczby np. 600 jest proporcjonalny do procentu? Sporządź tabelkę!
8. Jakim ułamkiem danej wielkości jest: 5% , 15% , 75% , $\frac{1}{2}\%$, $\frac{1}{10}\%$ tej wielkości?
9. Jakim procentem danej liczby jest: 10% z 10% tej liczby, 20% z 20% , 8% z 25% , 25% z 8% ?
10. Wyraż procentem następujące ułamki danej wielkości: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{7}{50}$, $\frac{13}{25}$, $1\frac{1}{2}$!
11. Wypełnij kratki liczbami dziesiętnymi, które otrzymasz, obliczając procent wskazany przez kolumnę z liczby wskazanej przez wiersz! (A więc w miejsce litery *a* należy wpisać 3% z 4). Przy pomocy powyższej tabelki oblicz:
 - a) 7% z 80, 7% z 800, 7% z 8000;
 - b) 4% z 30, 4% z 300, 4% z 30 000;
 - c) 3% z 17, 5% z 45, 9% z 63, 8% z 16,5, 7% z 530, 9% z 2150.

Uwaga. Np. $5\% \text{ z } 265 = (5\% \text{ z } 200) + (5\% \text{ z } 60) + (5\% \text{ z } 5)$.
12. Na towarze, kupionym za 7250 zł, kupiec zarobił 6% ; ile zł zarobił i za ile sprzedał towar?
13. Na towarze, kupionym za 5200 zł, kupiec stracił $1\frac{1}{2}\%$; ile kupiec stracił i za ile sprzedał towar?
14. W klasie liczącej 35 uczniów, 80% przeszło do następnej klasy; ilu uczniów przeszło?
15. W bitwie, w której brało udział 1500 żołnierzy, zginęło 11% ; ilu żołnierzy pozostało przy życiu?
16. Czynsz pewnej dzierżawy, wynoszący 2800 zł rocznie, podniesiono o 6% ; ile wynosi zwiększony czynsz?
17. Za bilet 3-ciej klasy zapłacono 18 zł 30 gr, bilet zaś 2-giej klasy jest o 50% droższy; ile kosztuje bilet 2-giej klasy?
18. Cenę za towar, który kosztował 7 zł 50 gr, podniesiono o 8% ; ile kosztował towar po podrożeniu?

	1%	2%	3%	4%
1	0,01	0,02		
2	0,02			
3				
4			a	

19. Kupiec zakupił 1250 l wina za 8125 zł; po czemu winien sprzedawać 1 l, aby zarobić 7%?
20. Książka kosztuje 5 zł, z czego autor otrzymuje 11%, księgarz 30%, wydawca 40%, a reszta pokrywa kosztą druku książki; ile kosztuje przeciętnie druk jednej książki? Ile księgarz zarobił na książce, przy sprzedaży której dał 12% opustu?
21. Przedsiębiorstwo przyniosło 285 000 zł dochodu brutto; kosztą produkcji wynosiły 62%, administracji 11%, podatki 13%. Jaki był czysty dochód?
22. Szynka zawiera 28% wody, 25% białka, 36% tłuszczu, a resztę stanowią sole; oblicz ile każdej z tych substancyj zawiera się w $1\frac{1}{2}$ kg szynki?
23. Mięso wołowe traci wskutek gotowania 15% swego ciężaru; ile waży po ugotowaniu $\frac{3}{4}$ kg mięsa wołowego?
24. Las, którego stan drzewny wynosi 5868 m^3 , posiada roczny przyrost $2\frac{1}{3}\%$; jeśli 1 m^3 drzewa kosztuje 18 zł, jaka jest wartość tego lasu po upływie roku?
25. Towar waży brutto (z opakowaniem): a) 18,5 kg, b) 5,6 kg, c) 4,6 kg, tara (opakowanie) zaś wynosi: a) 8%, b) $12\frac{1}{2}\%$, c) $8\frac{3}{4}\%$ tego ciężaru; ile waży towar netto (bez opakowania)?
26. Sprzedano majątek ziemski za: a) 650 000 zł, b) 440 000 zł, c) 300 000 zł; pośrednik, przy pomocy którego ta sprzedaż doszła do skutku, zastrzegł sobie: a) 1,4%, b) 1,2%, c) 1% ceny kupna czyli tak zwaną prowizję; ile otrzymał prowizji?
27. Ktoś ubezpieczył dom od ognia na: a) 60 000 zł, b) 20 000 zł, c) 16 000 zł i płacił zato rocznie: a) 1,6%, b) 3%, c) $\frac{1}{2}\%$ tej kwoty, czyli tak zwaną premję; ile wynosiła premja?
28. Kupiec przy sprzedaży towaru za 1250 zł dał 20% opustu; z kwoty, jaka stąd wynikła, dał dalszych 3% opustu, ponieważ towar był płacony gotówką. Ile otrzymał za towar?
29. Jednem „pro mille” jakiejś wielkości nazywamy $\frac{1}{1000}$ tej wielkości i oznaczamy: ‰. Pro mille z jakiejś wielkości np. 5‰ z 60 000 oznacza $\frac{5}{1000}$ z 60 000 = 300.
Oblicz: a) 6‰ z 1020 zł, b) 4‰ z 15 400 zł, c) 1‰ z 1 kg, d) 4‰ z 1 dm^2 , e) 5‰ z 1 dm^3 ?
30. a) Wisła ma 1092 km długości i posiada na całym biegu średnie nachylenie 1,05‰, to znaczy, że co 1 km poziom jej opada o 1,05‰ z 1 km; oblicz, jak wysoko nad poziomem morza leżą źródła Wisły!

b) Niemen ma 992 km długości i posiada na całym biegu średnie nachylenie $0,201\text{‰}$; jak wysoko nad poziomem morza leżą źródła Niemna?

c) W jakiej wysokości nad poziomem morza przepływa Niemen przez granicę polsko-litewską, jeśli odległość tego miejsca (wzdłuż rzeki) od źródeł wynosi 480 km?

31. Nachylenie średnie toru kolejowego między stacją A na wysokości 450 m nad poziomem morza a stacją B odległą o 30 km wynosi $2,54\text{‰}$, między stacją B a stacją C odległą od B o 45 km wynosi $2,01\text{‰}$, wreszcie między stacją C a stacją D odległą od stacji C o 38 km wynosi $1,95\text{‰}$; w jakiej wysokości nad poziomem morza znajduje się stacja D?
32. Miasto miało 100 000 ludności. Przyrost ludności w ciągu dwóch lat wynosił kolejno: 6‰ i 5‰ ; jaka była ludność tego miasta po upływie tych dwóch lat?
33. W Polsce jest $48,9\text{‰}$ pola ornego, $22,2\text{‰}$ lasów, $11,7\text{‰}$ nieużytków, 10‰ łąk, $7,2\text{‰}$ pastwisk. Przyjmując, że pole prostokąta o podstawie 1 dcm i o wysokości 1 cm (rys. 30) jest

48,9%	22,2%	11,7%	10%	7,2%
I	II	III	IV	V

Rys. 30.

obrazem powierzchni całej Polski, podzielono ten prostokąt na prostokąty I, II, III, IV i V, które odpowiednio obrazują użycie ziemi w Polsce;

a) jakie podstawy musiano obrać w tych prostokątach?

b) przyjmując powierzchnię Polski $388\,390\text{ km}^2$, oblicz powierzchnię: pola ornego, łąk, pastwisk, lasów i nieużytków!

34. Przedstaw, jak wyżej, rodzaj lasu w Polsce, wiedząc, że sosna stanowi 60‰ ogólnej powierzchni lasu, świerk 12‰ , olcha 6‰ , dąb 5‰ , jodła 3‰ , brzoza 3‰ , buk 3‰ , inne gatunki 8‰ !
35. Zbiór lnu w r. 1929 wyraża się następującymi procentami całkowitej produkcji światowej: Z. S. R. R. $57,9\text{‰}$, Polska $10,9\text{‰}$, Francja $4,2\text{‰}$, Litwa $5,6\text{‰}$, Belgia $3,1\text{‰}$, Łotwa $3,6\text{‰}$, Holandia $2,6\text{‰}$, Niemcy $1,7\text{‰}$, inne kraje $10,4\text{‰}$;
- a) wiedząc, że światowa produkcja wynosi 6 000 000 q, oblicz produkcję poszczególnych krajów!
- b) przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 33!
36. Długość linii kolejowych na świecie wynosi 1 229 800 km, z czego na Europę przypada $31,8\text{‰}$, na Amerykę Północną

40,5%, Południową 7,3%, na Australję 3,9%, na Azję 11,7%, a na Afrykę 4,8%. Przyjmując odcinek 1 *dcm* jako obraz długości wszystkich linii kolejowych na świecie, zaznacz na nim kolejno obrazy linii poszczególnych części świata i oblicz ich długości!

37. W roku 1931 zatrudnionych było w Polsce robotników: w górnictwie 22,7%, w hutnictwie 8,1%, w przemyśle włókienniczym 22,1%, metalowym 10,1%, mineralnym 7,5%, drzewnym 6,7%, spożywczym 7,9%, budowlanym 3,3%, chemicznym 5,6%, innym 6%;

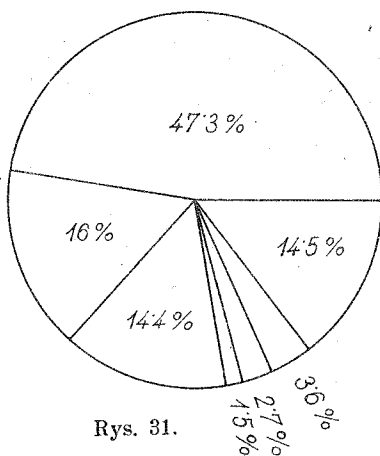
a) wiedząc, że razem robotników było 580 400, oblicz liczbę robotników, zajętych w poszczególnych gałęziach przemysłu!

b) Przedstaw to obrazowo, jak w zadaniu 33!

38. W roku 1930 wyprodukowano na całym świecie 479 800 000 *q* żyta, z czego przypada na: Z. S. R. R. 47,3%, Niemcy 16%, Polskę 14,5%, Czechosłowację 3,6%, Stany Zjednoczone 2,7%, Francję 1,5% i inne kraje 14,4%;

a) oblicz produkcję w poszczególnych krajach!

b) jeżeli powierzchnia koła przedstawia produkcję światową, to produkcję poszczególnych krajów przedstawiają odpowiednio wycinki (rys. 31). Np. wycinek, dający obraz produkcji Z. S. R. R. ma kąt 47,3% z 360°. Jakim kątom odpowiadają inne wycinki?



Rys. 31.

39. Powierzchnia lądu wynosi 148 900 000 *km*², z czego przypada na: Europę 6,7%, Azję 29,7%, Afrykę 19,9%, Amerykę 28,2%, Australję 6%, Antarktydę 9,5%;

a) oblicz powierzchnię poszczególnych lądów!

b) przedstaw je obrazowo jak w zadaniu 38!

Zadania

1. Oblicz liczbę, której: a) 8% wynosi 16, b) 12% wynosi 20, c) 5,5% wynosi 45, d) 15% wynosi 105,5, e) $6\frac{1}{2}\%$ wynosi 1170, f) $3\frac{1}{2}\%$ wynosi 63, g) 4,5% wynosi 81.
2. Oblicz liczbę, której: a) 12% wynosi 6; b) 7% wynosi 2,1; c) 16% wynosi 0,4; d) $4\frac{1}{2}\%$ wynosi 1,8; e) 6% wynosi $1\frac{1}{2}$.
3. Oblicz liczbę, której: a) 100% wynosi 100, b) 18% wynosi 18, c) 1% wynosi 100, d) 12% wynosi 1, e) 100% wynosi 1.
4. Oblicz liczbę, której: a) 120% wynosi 18, b) 130% wynosi 285, c) 145% wynosi 2840, d) $110\frac{1}{2}\%$ wynosi 48, e) 102,5% wynosi 648.
5. Ile kosztował towar, na którym kupiec, zarabiając 12%, zyskał 210 zł? Za ile sprzedał ten towar?
6. Kupiec sprzedał towar ze stratą $5\frac{1}{2}\%$, wynoszącą 88 zł; za ile kupił i za ile sprzedał towar?
7. Spłacono 70% długu, co wyniosło 2730 zł; jaki był dług?
8. Księgarz daje 8% rabatu; jaka jest cena sprzedażna książek, od których rabat wynosi 32 zł 48 gr?
9. W pewnym mieście było 5170 mężczyzn, co wynosiło 47% ogółu mieszkańców; ile kobiet było w tem mieście?
10. a) Do następnej klasy przeszło 23 uczniów, co stanowiło 92% liczby uczniów w klasie; ilu uczniów było w klasie?
b) Do następnej klasy nie przeszło 3 uczniów, co stanowiło $6\frac{2}{3}\%$ liczby uczniów w klasie; ilu uczniów przeszło?
11. Jaka była w r. 1930 światowa produkcja: a) srebra, b) złota, jeśli: a) 20,5%, b) 52,4% tej produkcji wynosiło: a) 1562,3 t, b) 333,3 t?
12. W pewnym powiecie jest 82% urodzajnej ziemi i 1125 km² nieurodzącej; jaki procent jest ziemi nieurodzącej i jak wielki jest ten powiat?
13. W r. 1929 było w szkołach średnich 62% chłopców, dziewcząt zaś 78 000; ilu było wszystkich uczniów?
14. 82,6% światowej produkcji siarki przypada na Stany Zjednoczone. Inne kraje produkują razem rocznie 548 000 t. Ile wynosi roczna produkcja Stanów Zjednoczonych?
15. Ludność Krakowa z początkiem r. 1931 wynosiła 212 000 t. j. 233% liczby mieszkańców z r. 1900; jaka była w r. 1900 ludność Krakowa?
16. Sprzedano dom za 155 000 zł, t. j. za kwotę, która wynosiła 128% kosztów budowy tego domu; ile na tej sprzedaży zarobiono?

Obliczanie procentu

Przypuśćmy, że mamy dane dwie liczby k i d i pytamy się, jakim procentem liczby k jest liczba d . Oznaczmy szukany procent

przez p . Mamy: $d = \frac{pk}{100}$ lub $d = (pk) : 100$

Stąd: $pk = 100 d$.

W iloczynie pk znamy jeden czynnik k i wartość iloczynu $100 d$. Zatem drugi czynnik p wynosi:

$$p = (100 d) : k$$

czyli

$$p = \frac{100 d}{k}.$$

Przykład. Jakim procentem kwoty 25 zł jest 3 zł?

Rozwiązanie: Mamy $k = 25$, $d = 3$, więc: $p = \frac{100 \cdot 3}{25} = 12$.

Szukany procent jest 12%.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również inaczej.

Oznaczając przez x szukany procent, zapisujemy nasze zadanie w sposób następujący:

jeśli od 25 zł mamy 3 zł,
to od 100 zł mamy x zł.

Ponieważ występują tu wielkości wprost proporcjonalne, zatem:

$$x : 3 = 100 : 25 = 4.$$

stąd

$$x = 12.$$

Szukany procent wynosi więc 12%.

Zadania

1. Jakim procentem pierwszej liczby jest druga liczba:

- a) 84 i 63, 120 i 6, 70 i 14, 75 i 3;
- b) 250 i 24, 3 i 21, 15 i 25, 120 i 270;
- c) 100 i 1, 26 i 26, 16 i 1, 1 i 14;
- d) 12,6 i 84, 1,46 i 0,2, 0,04 i 0,15, 0,2 i 1,84;
- e) $\frac{1}{2}$ i 10, $3\frac{1}{2}$ i $2\frac{1}{4}$, $5\frac{3}{4}$ i $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{4}$.

2. Aby obliczyć w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 816 jest liczba 16, zaokrąglamy 816 do liczby 800. Oznaczając przez x szukany procent, mamy:

$$x = \frac{16 \cdot 100}{800} = 2.$$

Zatem w przybliżeniu 2% z 816 równa się 16.

Chcąc podobnie obliczyć w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 2 jest liczba 0,00916, zaookrąglamy 0,00916 do liczby 0,009. Oznaczając przez x szukany procent, mamy:

$$x = \frac{0,009 \cdot 100}{2} = 4,5.$$

Zatem w przybliżeniu 4,5% z 2 równa się 0,00916.

Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem pierwszej liczby jest druga liczba:

- a) 1983 i 20, 4,025 i 2, 62,145 i 8;
- b) 4 i 108, 6 i 20,42, 5 i 0,0841;
- c) 289,45 i 8, $3\frac{1}{2}$ i 1,946, 0,006932 i 0,2.

3. Wiemy, że liczba 684 jest niedokładna, przyczem błąd nie przekracza 5 (t. j. 5 jednostek najniższego rzędu). Oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej, jakim procentem liczby 684 jest liczba 5. Otrzymasz w ten sposób w przybliżeniu „błąd procentowy” liczby 684. Przyjmując, że błąd nie przekracza 5 jednostek najniższego rzędu, oblicz w przybliżeniu do pierwszej cyfry znaczącej błąd procentowy liczb: a) 243; b) 23,1; c) 1,16; d) 0,0458; e) 0,000283; f) 3,845; g) 1,0641; h) 0,0004567.
4. Kupiec zapłacił za towar 7200 zł, a sprzedał go za 7700 zł; jaki % ceny kupna zyskał kupiec?
5. Kupiono towar za 364 zł, a sprzedano go za 336 zł; jaki procent ceny kupna stracono?
6. Kupiono towar za 824 zł i sprzedano go z zarobkiem wynoszącym 123 zł; jaki procent ceny kupna zarobiono?
7. W szkole była w poszczególnych klasach następująca liczba uczniów: I 58, II 52, III 48, IV 45, z czego ukończyło klasę z pomyślnym wynikiem: w I 54, II 47, III 45, IV 41; oblicz dla każdej klasy procent promowanych!
8. W pewnym mieście było 8500 mężczyzn i 9100 kobiet; jaki procent mężczyzn, a jaki kobiet był w tem mieście?
9. Światowa produkcja ołowiu w r. 1930 wynosiła 1 729 000 t, z czego na Polskę przypada 44 000 t; jaki to jest procent światowej produkcji?
10. Długość linii kolejowych na świecie wynosi: w Europie 390 000 km, w Ameryce Północnej 500 000 km, w Ameryce Południowej 90 000 km, w Australji 50 000 km, w Azji 140 000 km, w Afryce 60 000 km; jaki procent całej długości linii kolejowych przypada na poszczególne części świata?

11. W Polsce w 1931 r. na ogólną liczbę mieszkańców 31 100 000 było wyznania: rzymsko - katol. 19 900 000, prawosławnego 3 850 000, grecko - katolickiego 3 390 000, mojżeszowego 3 000 000, ewangelickiego 840 000, innych 120 000; oblicz, jaki procent ogólnej liczby mieszkańców przypadał na poszczególne wyznania, i przedstaw wyniki geometrycznie zapomocą wycinków tego samego koła!
12. Z Polski w r. 1929 wysłano 83 000 000 listów zagranicę, w czym do Austrii, Czechosłowacji i Z. S. R. R. po 4 980 000, do Francji 7 470 000, do Stanów Zjednoczonych 5 810 000, do Gdańska i Kanady po 3 320 000, do Niemiec 26 560 000, do Wielkiej Brytanii 1 660 000, a do innych krajów resztę; oblicz, jaki procent ogólnej liczby listów przypada na poszczególne kraje!
13. W r. szk. 1929/30 było w Polsce 3 700 000 uczniów szkół powszechnych, 205 000 uczniów szkół średnich, 95 000 uczniów szkół przemysłowych, 85 000 uczniów szkół zawodowych i 45 000 uczniów szkół wyższych. Wyraż to w procentach ogólnej liczby uczącej się młodzieży!
14. Ludność Polski wynosiła okragło:
- | | | | |
|-------------|---------|------------|------|
| w roku 1923 | | 28 160 000 | osób |
| „ 1924 | | 28 600 000 | „ |
| „ 1925 | | 29 030 000 | „ |
| „ 1926 | | 29 520 000 | „ |
| „ 1927 | | 29 860 000 | „ |
| „ 1928 | | 30 220 000 | „ |
- Oblicz: a) dla każdego z lat 1924—1928 procentowy przyrost ludności; b) procentowy przyrost ludności za pięciolecie 1923—1928.
15. Ludność Warszawy z początkiem roku 1931 wynosiła 1 115 000 osób; jaki to jest procent ludności polskiej (31 100 000 z tego roku)?
16. Ludność Lwowa w r. 1900 wynosiła 160 000 osób, w r. 1925 235 000 osób; oblicz procentowy przyrost ludności Lwowa za pierwszą ćwierć wieku XX. Ile wyniosłaby ludność Lwowa w r. 1950, gdyby w drugiej ćwierci wieku XX, procentowy przyrost ludności był ten sam, co w pierwszej?
17. Dorzecze Dniestru posiada dróg wodnych 940 km, Dźwiny 540 km, Niemna 2800 km, Prutu 220 km, Prypeci 3560 km, Warty 810 km, Wisły 5280 km; jaki procent całej długości dróg wodnych w Polsce przypada na poszczególne dorzecza?

18. Wywóz węgla polskiego zagranicę wyraża się w tysiącach *t* w sposób następujący: w 1925 r. — 8 158; w 1926 r. — 14 437; w 1927 r. — 11 226; w 1928 r. — 13 035; w 1929 r. — 13 934; w 1930 r. — 12 497; w 1931 r. — 13 827. Wyraż w procentach, o ile wywóz w poszczególnych latach był większy, aniżeli w 1925 r.
19. W 1913 r., w którym Gdańsk należał jeszcze do Niemiec, zawinęło do portu 2910 okrętów. Odkąd Gdańsk jest Wolnem Miastem i pozostaje pod protektorem Polski, ruch okrętów wzrósł i wynosił: w 1929 r. — 5414 okrętów, w 1930 r. — 6 078 okrętów, w 1931 r. — 5959 okrętów; wyraż w procentach, o ile ruch okrętów w poszczególnych latach był większy, aniżeli w 1913 r.!
20. O rozwoju założonego przez Polskę portu w Gdyni świadczą następujące liczby: w 1927 r. wypłynęło z portu 519 okrętów, wywożąc 880 000 *t* węgla; w 1928 wywiozło 1093 okrętów — 1 800 000 *t*; w 1929 r. 1551 okrętów — 2 500 000 *t*; w 1930 r. 3148 okrętów — 4 400 000 *t*; oblicz w procentach:
 - a) o ile więcej wypłynęło okrętów w poszczególnych latach, niż w 1927 r.
 - b) o ile więcej wywieziono węgla przez Gdynię w poszczególnych latach, aniżeli w 1927 r.
21. Ilość radjoabonentów wynosiła: w 1926 r. — 5000; w 1927 r. 121 000; w 1929 r. — 203 000; w 1930 r. — 276 000; wyraż w procentach, o ile wzrastała liczba abonentów w wymienionych latach w porównaniu z 1925 r.
22. Koleje żelazne przewiozły: w 1926 r. — 147 000 000 osób, w 1927 r. — 159 000 000, w 1928 r. — 174 000 000; o ile w latach 1926, 1927 przewóz był procentowo mniejszy od przewozu w 1928 r.?

Procenty proste

Obliczanie dochodu

Kwotę, jaką dłużnik pożycza od kapitalisty, nazywamy kapitałem. Kapitalista za wypożyczenie pewnego kapitału na przeciąg pewnego czasu otrzymuje wynagrodzenie, zwane dochodem.

Wynagrodzenie, jakie kapitalista pobiera od każdych 100 zł, pożyczonych na 1 rok, nazywamy procentem rocznym lub stopą

procentową. Jeżeli np. kapitalista od każdych 100 zł pożyczonych na 1 rok pobiera 6 zł, wówczas mówimy, że pobiera za pożyczkę 6% rocznie.

A więc stopa procentowa wskazuje, jaki procent kapitału jest wynagrodzeniem za jeden rok.

Przy pożyczkach występują zatem cztery wielkości: kapitał (pożyczony), stopa procentowa, czas (na który kapitał pożyczono) i dochód.

Gdy 3 z tych wielkości są dane, to czwartą możemy obliczyć.

Oznaczmy przez K kapitał (liczbę zł), przez P stopę procentową, przez L liczbę lat (na którą kapitał pożyczono). Zapytajmy się, jaki będzie dochód. Niechaj D oznacza dochód (liczbę zł).

100 zł da przez 1 rok P zł dochodu; przez L lat da L razy większy dochód t. zn. $L \cdot P$ zł.

Zatem 1 zł da po L latach $(P \cdot L) : 100$ zł dochodu. K zł da oczywiście K razy więcej dochodu. Należy więc iloraz $(P \cdot L) : 100$ pomnożyć przez K . Ponieważ iloraz mnożymy, mnożąc dzielną więc:

$$D = (KPL) : 100 \text{ lub } D = \frac{KPL}{100} \quad (1)$$

Przykład. Obliczyć dochód od 7648 zł danych na 8%, a wypożyczonych na 5 lat.

Rozwiązanie. Mamy tutaj $K = 7648$, $P = 8$, $L = 5$. Zatem:

$$D = \frac{7648 \cdot 8 \cdot 5}{100} = 3059,20.$$

Dochód więc wynosi 3059,20 zł.

Możemy powyższe zadanie rozwiązać bez pomocy wzoru w następujący sposób:

Ponieważ 100 zł za 1 rok przynosi 8 zł, to 1 zł za 1 rok przynosi $\frac{8}{100}$ zł, a 7648 zł za 1 rok przynosi $\frac{8 \cdot 7648}{100}$ zł.

Zatem 7648 zł za 5 lat przynosi $\frac{8 \cdot 7648 \cdot 5}{100}$ zł.

Widzimy, że dochód $= \frac{8 \cdot 7648 \cdot 5}{100}$ zł $= 3059,20$ zł.

Uwaga 1. W zadaniach z procentu przyjmuje się, że rok ma 360 dni, czyli 12 miesięcy po 30 dni. Czas należy wyrażać w ułamkach lat np. 7 miesięcy $= \frac{7}{12}$ roku, 8 dni $= \frac{8}{360}$ r. i t. p.

Np. ile wynosi dochód od 800 zł wypożyczonych na 5% na

3 lata, 2 miesiące, 9 dni? Ponieważ 3 lata, 2 miesiące, 9 dni wyrażone w latach równają się: $3 + \frac{2}{12} + \frac{9}{360} = \frac{383}{120}$,

przeto
$$D = \frac{800 \cdot 5 \cdot \frac{383}{120}}{100} = \frac{383}{3} = 127,78.$$

Zatem dochód wynosił 127 zł 78 gr.

Uwaga 2. Jeśli do kapitału doliczymy dochód, to otrzymamy t. zw. wartość końcową kapitału; kapitał pożyczony nazywamy wartością początkową kapitału.

Np. Kapitał 3000 zł, pożyczony na 4 lata na 5%, dał 600 zł dochodu. Zatem 3000 zł jest wartością początkową kapitału, a $3000 \text{ zł} + 600 \text{ zł} = 3600 \text{ zł}$ jest wartością końcową kapitału. Oznaczając przez W wartość końcową kapitału, możemy napisać:

$$W = K + D.$$

Zadania

1. Oblicz dwoma sposobami dochód, jaki przynosi:

- a) kapitał 225 zł oddany na 2 lata na 6%;
- b) " 2150 zł " " 3 lata i 4 miesiące na 6%;
- c) " 3265 zł " " $4\frac{1}{2}$ miesiąca na 8%;
- d) " 6836 zł " " $2\frac{1}{2}$ lat na $6\frac{3}{4}$ %;
- e) " 27 156 zł " " $2\frac{3}{4}$ lat na 10%;
- f) " 5016 zł " " 1 miesiąc na $4\frac{1}{2}$ %;
- g) " 672 zł " " 5 miesięcy na $6\frac{1}{2}$ %;
- h) " 12 600 zł " " 10 miesięcy na $9\frac{3}{4}$ %;
- i) " 1000 dol. " " $\frac{1}{2}$ roku na 10%;
- j) " 6824 zł " " od 14/VII do 19/VIII na $7\frac{1}{2}$ %;
- k) " 3580 zł " " od 10/IV do 21/VI na $8\frac{1}{2}$ %.

2. Oblicz w zadaniu (1) wartość końcową kapitału, posługując się wzorem $W = K + D$!

3. Jaka jest wartość końcowa kapitału 380 zł, oddanego na 1 rok na 5%?

Ponieważ dochód wynosi $\frac{5}{100} \cdot 380 \text{ zł}$, a kapitał $380 \text{ zł} = \frac{100}{100} \cdot 380 \text{ zł}$, więc wartość końcowa kapitału równa się:

$$\frac{100}{100} \cdot 380 \text{ zł} + \frac{5}{100} \cdot 380 \text{ zł} = \frac{105}{100} \cdot 380 \text{ zł} = 399 \text{ zł},$$

czyli 105% kapitału 380 zł.

Oblicz w ten sposób wartość końcową kapitału: a) 495 zł, b) 3290 zł, c) 11 850 zł, oddanego na 1 rok na: a) 8%, b) 10,5%, c) $6\frac{3}{4}$ %.

4. O kupno domu ubiega się dwóch kupców. Jeden daje gotówką 632 000 zł, drugi zaś 400 000 zł gotówką, a 250 000 zł po upły-

wie roku; który z kupców daje lepsze warunki, jeżeli kapitał można umieścić na 9%? (Objaśnienie: porównaj warunki po upływie roku!).

5. Kapitał a) 870 zł, b) 2745 zł przynosi przy danym procencie i czasie procentowania: a) 15 zł, b) 247 zł 5 gr dochodu; jaki dochód w tych samych warunkach przyniesie kapitał: a) 609 zł, b) 3164 zł?
6. Kapitał: a) 8250 zł, b) 1247 zł przynosi przy danym procencie i czasie procentowania dochód: a) 680 zł, b) 87 zł 29 gr; jaki kapitał w tych samych warunkach przyniesie a) 510 zł, b) 143 zł 57 gr dochodu?
7. Pewien kapitał oddany na umówiony procent przyniósł po 5 latach 2512 zł dochodu; a) jaki dochód przyniesie ten kapitał po $3\frac{1}{2}$ latach, b) w ilu latach przyniesie 4521 zł 60 gr dochodu?
8. Kapitał 500 zł oddano na 12%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na 1 rok na tych samych warunkach; jaka była wartość końcowa kapitału?
9. Kapitał 1000 zł oddano na 10%. Po roku doliczono do tego kapitału dochód i znowu pożyczono na rok na tych samych warunkach; jaki będzie dochód po 2 latach?

Obliczanie kapitału

Przypuśćmy, że znamy P (stopę procentową), L (liczbę lat, na które pożyczono kapitał), D (dochód po L latach). Zapytajmy się, jaki kapitał pożyczono. Oznaczmy ten kapitał, jak poprzednio, przez K . Mamy wzór:

$$D = \frac{KPL}{100} \text{ lub } D = (KPL) : 100.$$

Stąd $KPL = 100 D$.

Ponieważ w iloczynie $KPL = K \cdot (PL)$, nieznanym czynnikiem jest K , więc $K = (100 D) : (PL)$.

A więc
$$K = \frac{100 D}{PL}.$$

Przykład. Jaki kapitał pożyczony na 4 lata na 9% przyniesie 2340 zł dochodu?

Rozwiązanie. Mamy $L = 4$, $P = 9$, $D = 2340$.

Zatem:
$$K = \frac{100 \cdot 2340}{9 \cdot 4} = 6500.$$

Szukany więc kapitał wynosi 6500 zł.

Moglibyśmy to zadanie rozwiązać również przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x szukany kapitał.

100 zł (na 9% przez 4 lata) przyniesie 36 zł dochodu

x zł („ 9% „ 4 „) „ 2340 zł „

Ponieważ kapitał jest wprost proporcjonalny do dochodu, więc:

$$x : 100 = 2340 : 36 = \frac{2340}{36}$$

Zatem:

$$x = \frac{2340}{36} \cdot 100 = 6500.$$

Zadania

1. Jaki kapitał oddany

a)	na 5%	przyniesie po	4 latach	2462 zł	dochodu
b)	„ 6%	„ „	2 „	660 zł	„
c)	„ $7\frac{1}{2}\%$	„ „	4 miesiącach	65 zł	„
d)	„ 8%	„ „	5 „	120 zł	„
e)	„ $4\frac{1}{2}\%$	„ „	4 „	117 zł 78 gr	„
f)	„ 12%	„ „	5 „	423 zł	„
g)	„ $3\frac{1}{2}\%$	„ „	45 dniach	14 zł	„
h)	„ $5\frac{1}{2}\%$	„ „	105 „	77 zł	„
i)	„ 8%	„	od 3/III do 29/X	134 zł	„
j)	„ 9%	„	miesięcznie	750 zł	„
k)	„ 11%	„	po 2 lat. 11 mies.	14 341 zł 25 gr	„

- Majątek ziemski przynosi rocznie 12 750 zł dochodu; jaki kapitał, umieszczony na 8%, przyniesie ten sam dochód?
- Kapitał a) 3240 zł, b) 7004 zł pożyczono na pewien czas na a) 8%, b) 9%; jaki kapitał, oddany na a) 6%, b) 8,5%, przyniesie w tym samym czasie ten sam dochód?
- Kapitał a) 8040 zł, b) 1134 zł pożyczono na pewien czas na a) 9%, b) $8\frac{1}{2}\%$; na jaki procent należy oddać kapitał a) 10 800 zł, b) 1071 zł, aby w tym samym czasie przyniósł ten sam dochód?
- Kapitał a) 6184 zł, b) 5160 zł oddano na a) 5 lat, b) $4\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; jaki kapitał, oddany na a) 8 lat, b) $6\frac{3}{4}$ lat, na ten sam procent, przyniesie ten sam dochód?
- Kapitał a) 1480 zł, b) 558 zł oddano na a) 6 lat, b) $5\frac{1}{2}$ lat na pewien procent; na ile lat na ten sam procent trzeba pożyczyc kapitał a) 1620 zł, b) 396 zł, aby otrzymać ten sam dochód?

Czas oprocentowania

Przypuśćmy, że znamy K (kapitał pożyczony), P (stopę procentową), D (dochód). Zapytajmy się, na ile lat pożyczono kapitał. Oznaczmy przez L liczbę lat.

4. Pewien kapitał oddano na a) 6%, b) $7\frac{1}{2}\%$ na a) 9 lat, b) $8\frac{1}{2}$ lat; na jaki procent trzeba ten kapitał umieścić, aby po a) 8 latach, b) 5 latach przyniósł ten sam dochód?
5. Pewien kapitał oddano na a) 10%, b) $12\frac{1}{2}\%$ na a) $4\frac{1}{2}$ lat, b) 6 lat; w ilu latach ten kapitał przyniesie ten sam dochód, jeśli przyjmujemy, że oddany był na a) 9%, b) 12%?

Stopa procentowa

Przypuśćmy, że znamy K (kapitał pożyczony), L (liczbę lat, na które kapitał pożyczono), D (dochód). Zapytajmy się, na jaki procent pożyczono. Niechaj P oznacza stopę procentową.

$$\text{Mamy} \quad D = \frac{KPL}{100} \text{ lub } D = (KPL) : 100.$$

$$\text{Stąd} \quad KPL = 100 D.$$

Ponieważ w iloczynie $KPL = (KL) \cdot P$ nieznanym czynnikiem jest P , zatem $P = (100 D) : (KL)$.

$$\text{A więc} \quad P = \frac{100 D}{KL}.$$

Przykład. Na jaki procent pożyczono kapitał 3500 zł, jeśli po 4 latach przyniósł 840 zł dochodu?

Rozwiązanie. Mamy $K = 3500$, $L = 4$, $D = 840$.

$$\text{A więc} \quad P = \frac{100 \cdot 840}{3500 \cdot 4} = 6.$$

Zatem kapitał pożyczono na 6%.

Moglibyśmy również to zadanie rozwiązać przy pomocy reguły trzech. Oznaczmy przez x stopę procentową.

(3500 zł po 4 latach) na 1% przyniesie dochodu $\frac{1}{100} \cdot 3500$ zł
 (" " " " ") " $x\%$ " " " 840 zł.

Ponieważ dochód jest wprost proporcjonalny do stopy procentowej, więc:

$$x : 1 = 840 : \frac{3500 \cdot 4}{100}.$$

Zatem $x = 6$.

Zadania

Przy jakim procencie:

a)	kapitał 2460 zł	da po	3 latach	405 zł 90 gr	dochodu
b)	" 9725	" " "	9 miesiącach	291 "	" "
c)	" 2280	" " "	21 dniach	3 " 99	" "
d)	" 5184	" " "	100 dniach	57 " 60	" "

- e) kapitał 6440 zł da po 3 miesiącach 48 zł 30 gr dochodu
 f) „ 2150 „ „ „ 3 latach 4 mies. 430 „ „ „
 g) „ 1000 „ „ „ 10 latach 1000 „ „ „

2. Przy jakim procencie:

- a) kapitał 5600 zł ma po 5 latach wartość końc. 6760 zł
 b) „ 2000 „ „ „ 3 lat. 4 mies. „ „ 2300 „
 c) „ 9725 „ „ „ 9 miesiącach „ „ 10 016 „ 75 gr
 d) „ 5400 „ „ „ 5 latach „ „ 6642 „
 e) „ 425 zł 50 gr „ „ 4 latach „ „ 476 „ 56 „

3. Kupiec zaciągnął 7 kwietnia pożyczkę 1300 zł i zobowiązał się wypłacić za nią 7 sierpnia ~~1332~~ 1332 zł 50 gr; na jaki procent wziął pożyczkę?

4. Na jaki procent trzeba oddać 1 zł, aby jego wartość końcowa po 12½ latach wynosiła 2 razy tyle, t. j. 2 zł?

5. Pewien kapitał, oddany na a) 8%, b) 7½%, przyniósł po pewnym czasie a) 645 zł, b) 585 zł dochodu; na jaki procent należy ten kapitał umieścić, aby w tym samym czasie przyniósł a) 774 zł, b) 624 zł dochodu?

6. Pewien kapitał, oddany, na a) 11%, b) 10½%, przyniósł po pewnym czasie a) 1034 zł, b) 903 zł dochodu; jaki dochód w tym samym czasie da ten kapitał, jeśli będzie umieszczony na a) 9%, b) 10¾%?

Rabat, brutto, skonto, prowizja

Zadania

1. Arkusz papieru kosztuje 4 gr. Przy zakupie 100 arkuszy daje kupiec 10%, przy zakupie 500 arkuszy 12%, a przy zakupie 1000 arkuszy 15% rabatu; ile należy zapłacić za 100, za 500, za 1000 arkuszy papieru?

2. Kupiec sprzedał 84 m sukna za 1108 zł 80 gr, dając 12% rabatu; po ile sprzedawał kupiec 1 m tego sukna bez rabatu?

Licz: za 100 zł (po odliczeniu rabatu) 88 zł

„ x „ („ „ „) 1110,8 zł.

3. Kupiec sprzedał 120 l wina, którego liter kosztował 6 zł, z pewnym rabatem za 669 zł 60 gr; ile % wynosił rabat?

4. W pace wysłano 80 kg owoców; ile waży paka, jeżeli opłata za przesyłkę 1 kg wynosi 16 gr, opłacono zaś 15 zł 20 gr?

5. Oblicz wagę netto, jeżeli waga brutto wynosi 20 kg, a tara 4½% wagi brutto!

6. Oblicz wagę brutto, jeżeli waga netto wynosi 18 kg, a tara 15% wagi brutto!
7. Ile procent wynosi tara, jeżeli waga brutto wynosi 30 kg, a waga netto 27,45 kg?
8. Jeżeli ktoś kupuje towar w większej ilości, to otrzymuje opust na cenie, który nazwalismy rabatem. Należności za towar czasami nie płaci się natychmiast gotówką, ale dopiero po kilku miesiącach. Jeżeli ktoś jednak płaci gotówką, to otrzymuje na cenie towaru opust, który nazywa się skontem. Np. ktoś zakupił 20 t węgla po 75 zł za tonnę, a ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 150 zł mniej. W tym wypadku skonto wynosi 150 zł; ile % ceny węgla wynosi skonto?
9. Ktoś zakupił 40 tonn węgla po 72 zł za tonnę. Ponieważ płacił gotówką, zapłacił o 280 zł mniej; ile % ceny węgla wynosi skonto?
10. Przy zakupie towaru za 4350 zł, za który płacono gotówką, otrzymano $8\frac{1}{2}\%$ skonta; ile zapłacono za towar?
11. Handlarz zakupił żelaza za 16 500 zł i zapłacił natychmiast gotówką tylko 15 427 zł 50 gr; ile % skonta otrzymał?
12. Towar waży 2332 kg brutto, tara zaś wynosi 6%; ile należy zapłacić za ten towar, jeżeli 1 kg towaru netto kosztuje 72 gr, rabat zaś wynosi $2\frac{3}{4}\%$?
13. Pośrednik pobiera za sprzedanie towaru 8‰ prowizji (t. j. wynagrodzenia za pośrednictwo); ile zł otrzyma, gdy za jego pośrednictwem sprzedano towaru za 25 000 zł?
14. Za ubezpieczenie towaru zapłacił kupiec 26 zł 25 gr, t. j. $1\frac{3}{4}\%$ wartości towaru; oblicz wartość towaru!
15. Kupiec sprowadził 10 skrzyń kawy, z których każda ważyła 40 kg brutto. Tara wynosiła 10% wagi brutto; ile zapłaci za kawę, jeżeli przewozowe za 1 kg (brutto) wynosi 35 gr, a otrzymał 6% rabatu z ceny 20 zł za 1 kg?
16. Kupiec zakupił 460 kg winogron po 2 zł 40 gr za 1 kg, a płacąc gotówką, otrzymał 5% skonta. Zepsuło się 12% winogron; po czemu ma sprzedawać 1 kg, jeżeli chce zarobić 16% włożonej gotówki?
17. Za ubezpieczenie zboża na wypadek gradobicia zapłacono 120 zł tak zwanej premji, liczonej jako $\frac{3}{4}\%$ wartości zboża; jak wysoko oszacowano zboże?
18. Agent handlowy w Wilnie sprzedał na rachunek fabrykanta w Poznaniu narzędzia rolnicze. Po odciągnięciu komisowego,

wynoszącego 7%, przesłał mu 11 552 zł; za jaką kwotę sprzedał narzędzia?

19. Kupiec sprowadził towaru za 1200 zł, przyczem otrzymał 6% skonta, ponieważ płacił gotówką. Koszta przewozu wyniosły 88 zł, a pośrednikowi zapłacił 30 zł. Połowę towaru sprzedał za 640 zł; za ile musi sprzedać drugą połowę, jeżeli chce zarobić 20% wyłożonych pieniędzy?

Stopy

Określenie

Zawartość szlachetnych metali, t. j. platyny, złota lub srebra w stopach (otrzymanych przez stopienie szlachetnego metalu z innymi metalami), określamy próbą. Próba jest to wykładnik stosunku ciężaru szlachetnego metalu, zawartego w danym stopie do ciężaru całego stopu.

Np. Stop, zawierający 18 g czystego srebra i 2 g miedzi jest srebrem próby $\frac{18}{18+2} = \frac{18}{20} = 0,9$.

Ponieważ przy danej próbie ciężar szlachetnego metalu jest wprost proporcjonalny do ciężaru stopu, więc 1 g srebra próby 0,9 zawiera 0,9 g czystego srebra. Znając ciężar stopu i próbę, możemy obliczyć ciężar metalu szlachetnego, zawartego w stopie.

Np. Ile czystego srebra zawiera 680 g srebra próby 0,875?

Ponieważ 1 g stopu zawiera 0,875 g czystego srebra, więc 680 g stopu zawiera $680 \cdot 0,875$ g czystego srebra, czyli 595 g czystego srebra.

Zadania

- Jakiej próby są stopy, zawierające: a) 6,3 g czystego srebra i 2,7 g miedzi; b) 45 g czystego złota i 9 g miedzi; c) 52 g czystego srebra i 12 g miedzi?
- Ile czystego srebra znajduje się w stopie, który waży: a) 845 g, b) 0,65 kg, c) 0,712 kg, a jest próby: a) 0,76, b) 0,85, c) 0,68?
- Karat równa się $\frac{1}{24}$ i służy (w systemie niemetrycznym) do wyrażania, ile g czystego złota przypada na 24 g stopu. Np. 14-karatowe złoto zawiera 14 g czystego złota i 10 g innych metali (miedzi). Jakiej próby jest złoto: a) 14-, b) 16-, c) 18-karatowe?
- Stopiono razem 32 g srebra próby 0,825, 40 g próby 0,85 i 75 g próby 0,924; jakiej próby będzie nowy stop?

5. Stopiono razem 83 g złota próby 0,75, 42 g próby 0,82 i 25 g czystego złota; jakiej próby będzie nowy stop?
 6. Dzwony leją ze stopu, który zawiera 390 kg miedzi, 110 kg cyny, 5 kg cynku i 4 kg ołowiu; ile kg każdego z tych metali potrzeba do dzwonu, który waży 1600 kg? (Podziel 1600 w stosunku 300 : 110 : 5 : 4!).
 7. Do odlewu rzeźb używa się bronzu, który zawiera 26 kg miedzi, 2 kg cyny, 1 kg cynku i 1 kg ołowiu; ile kg każdego z tych metali użyto przy odlewie rzeźby, wagi 2000 kg?
-

Wiadomości o oszczędnościach i kredycie.

P. K. O.

Rachunek monet

Monety są środkiem płatniczym, sporządzonym wedle określonych przepisów. Monety wybija się zazwyczaj ze złota, srebra, niklu i miedzi. Ponieważ złoto i srebro są metalami miękkimi, więc dodaje się przymieszkę innego metalu, najczęściej miedzi. Monety są więc wybijane ze stopu. Moneta nazywa się główną, jeżeli istnieje obowiązek przyjmowania jej w każdej ilości. Moneta nazywa się zdawkową albo bilonem, jeżeli niema obowiązku przyjmowania jej w każdej ilości.

Moneta zdawkowa służy głównie do drobnych wypłat.

Jeżeli w pewnym kraju wybija się monetę główną ze złota, to mówimy, że w tym kraju jest waluta złota.

W Polsce istnieje waluta złota. Jednostką monety jest złoty (zł), który dzieli się na 100 groszy (gr).

Polskie monety główne wybija się ze złota próby 0,900 w sztukach po 100 zł, 50 zł, 25 zł. Moneta 25 zł nazywa się dukatem polskim.

Polskie monety zdawkowe są: 10 zł wagi 22 g ze srebra próby 0,750; 5 zł wagi 11 g ze srebra próby 0,750; 2 zł wagi 4,4 g ze srebra próby 0,750; 1 zł wagi 7 g z czystego niklu; 50 gr, 20 gr i 10 gr z niklu; 5 gr, 2 gr i 1 gr z brązu.

Bilon i „pieniądze papierowe” czyli banknoty są zastępczym środkiem pieniężnym i uprawniają do otrzymania w Banku Polskim tyle zł w złocie, na ile opiewają.

Podajemy niżej zestawienie monet najważniejszych państw:

Państwo	Moneta	Waga jednostki w g	Liczba sztuk wybijanych z 1 kg czystego złota	Próba monety
Anglja	Suweren 1 £	7,9881	136,5675	0,916
Austrja	Szyling 1 S	0,23524	4723,2	0,900
Czecho-słowacja . .	Korona czeska 1 Kč	0,04953	22432	0,900
Gdańsk	Gulden 1 G	0,31952	3414,2	0,917
Niemcy	Marka 1 RM	0,39825	2790	0,900
Polska	Złoty 1 zł	0,18755	5924,44	0,900
Rosja	Rubel 1 R	0,86026	1291,60	0,900
Skandynawja	Korona	0,44803	2480	0,900
Stany Zjedn. Ameryki Pn.	Dolar 1 \$	1,67181	664,615	0,900
Szwajcarja . .	Frank szwajcarski 1 Frs.	0,32258	3414,44	0,900
Węgry	Pengö 1 P	0,2924	3800	0,900

Zadania

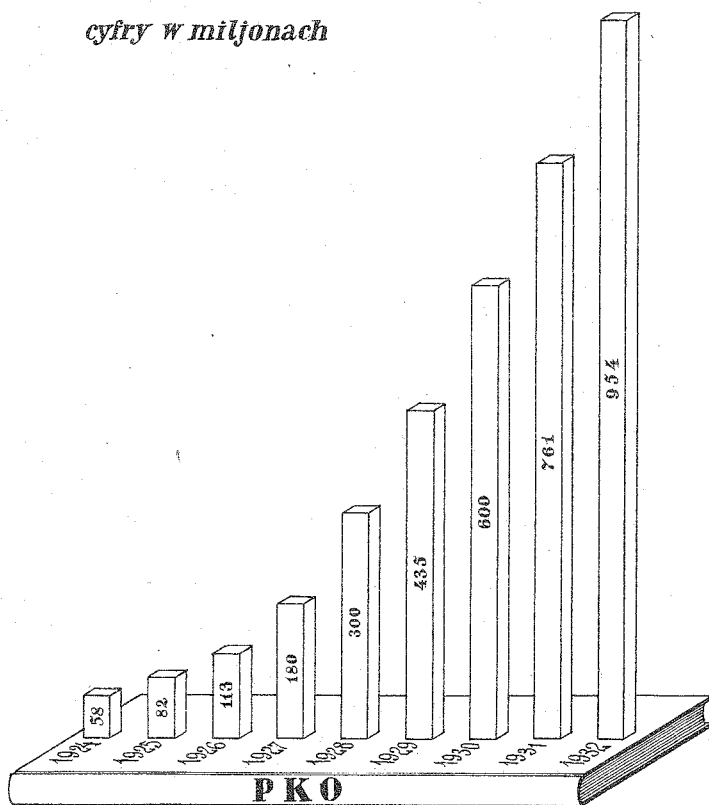
1. Ile czystego złota zawiera: a) 1 £, b) 100 S, c) 25 G, d) 100 Kč, e) 20 RM, f) 25 zł, g) 10 R, h) 20 Koron Skandynawskich, i) 10 \$, j) 20 Frs, k) 20 P?
2. Ile: a) £, b) S, c) G, d) Kč, e) RM, f) zł, g) R, h) Koron Skandynawskich, i) \$, j) Frs, k) P kosztuje 1 g czystego złota?
3. Jaka jest wartość w zł funta tureckiego, który waży 7,216 g i jest próby 0,916?
4. Jakiej próby jest 20 jenów (moneta japońska), jeśli moneta ta waży 16,6 g, a z 1 kg czystego złota wybija się 66 $\frac{2}{3}$ sztuk tej monety?
5. Jaka jest wartość: a) 25 G, b) 10 R, c) 20 Frs w zł?
6. Jaka jest wartość: a) 20 P w Frs, b) 1 £ w G, c) 100 Kč w RM?

Instytucje finansowe

Instytucjami finansowymi są kasy oszczędności oraz banki. Ich zadaniem jest: *a)* gromadzić oszczędności społeczeństwa, *b)* udzielać kredytu (t. j. pożyczek), *c)* pośredniczyć w obrotach pieniężnych. Rozróżniamy instytucje finansowe prywatne, komunalne i państwowe. Np. Bank Polski, Poczтовая Kasa Oszczędności i Bank Gospodarstwa Krajowego są instytucjami państwowymi; Miejskie Kasy Oszczędności w Warszawie, Lwowie, Krakowie i t. d. są instytucjami komunalnymi; prócz tego istnieje wiele banków prywatnych.

W Polsce najwygodniej jest składać oszczędności w Pocztovej Kasie Oszczędności (P. K. O.), to też liczba książeczek oszczędności w P. K. O. stale wzrasta, jak to widać z rys. 32.

Wkłady oszczędnościowe, poczynawszy od 1 zł, przyjmują: Kasa Centrali P. K. O. w Warszawie, Kasy Oddziałów P. K. O. i wszyst-



Rys. 32.

kie urzędy pocztowe. Osoba, która złoży w P. K. O. pewną kwotę, otrzymuje książeczkę oszczędnościową, w której wpisuje się nazwisko właściciela i wysokość złożonej kwoty. Kwota złożona na książeczkę daje obecnie 5% rocznie dochodu. W odróżnieniu od innych instytucji finansowych mają książeczki P. K. O. tę zaletę, że ich właściciele mogą każdej chwili i w każdej miejscowości, w której znajduje się Urząd pocztowy, podjąć codziennie kwotę do 100 zł. Jest to wielka wygoda, zwłaszcza podczas podróży i wy-cieczek.

Zadania

1. Ktoś złożył w P. K. O. 3/I 1932 r. 60 zł, a 1/I 1933 r. 85 zł; ile będzie posiadał 1/I 1933 r., a ile 1/I 1934 r., jeśli uwzględ-nisz 5%?
2. Wartość 1 zł po upływie danej liczby lat przy 3%, 4%, 5%, 6%, 10%, 12% podaje tabelka:

Lata	1	2	3	4	5	10	15	20	25
3%	1,03	1,0609	1,0927	1,1255	1,1593	1,3439	1,5580	1,8061	2,0938
4%	1,04	1,0816	1,1249	1,1699	1,2167	1,4802	1,8009	2,1911	2,6658
5%	1,05	1,1025	1,1576	1,2155	1,2763	1,6289	2,0789	2,6533	3,3864
6%	1,06	1,1236	1,1910	1,2625	1,3382	1,7908	2,3966	3,2071	4,2919
10%	1,1	1,21	1,331	1,4641	1,6105	2,5939	4,1776	6,7280	10,8356
12%	1,12	1,2544	1,4044	1,5725	1,7606	3,1035	5,4701	9,6387	16,9882

W tabelce powyższej uwzględniono t. zw. procent składany. Przy procencie składanym (np. 5%) po 1 roku mamy 105 zł; po upływie drugiego roku oblicza się procent nie tylko od złożonych 100 zł, ale także od 5 zł, które przyrosły i t. d.

Uwaga. Wartość 1 zł oddanego na 5% wynosi po upływie 10 lat 1,6289 zł t. j. 1 zł 62 gr i 0,0089 zł. Jakkolwiek nie ma monety na tysięczne i dziesięciotysięczne 1 zł, to jednak cyfry tych jednostek są potrzebne, gdyż np. wartość 100 zł odda-nych na 5% wynosi po upływie 10 lat 162 zł 89 gr.

Na początku 1930 r. złożono kwotę 2000 zł na 5%; do jakiej

- kwoty wzrośnie ten kapitał po upływie a) 5, b) 10, c) 15, d) 20 lat, licząc procent składany?
3. Na początku 1920 r. złożono do kasy na procent składany 4% 600 zł, na początku 1925 r. 300 zł, a na początku 1930 r. 400 zł; jaka będzie wartość wszystkich złożonych pieniędzy z końcem roku 1934?
- Powtórz to zadanie, przyjmując: a) 3%, b) 5%, c) 6%, d) 10%, e) 12%!
4. Oblicz wartość 1 zł, oddanego na procent składany: a) 3%, b) 4%, c) 5%, d) 6%, e) 10%, f) 12% po upływie 50 lat!
- Uwaga. Oblicz najpierw wartość 1 zł po upływie 25 lat, a następnie wartość otrzymanej kwoty znowu po upływie 25 lat!
5. Oblicz wartość 100 zł, oddanych na procent składany 4% po upływie: a) 40 lat, b) 60 lat, c) 9 lat, d) 45 lat!
6. Powtórz zadanie (5), biorąc inny procent składany!

Bezgotówkowe środki zapłaty

Pod względem gospodarczym jest bardzo dla Państwa rzeczą ważną zastąpić częściowo obieg pieniędzy takimi środkami, które nie wymagają natychmiastowej wypłaty gotówki.

Konta

Jeżeli ktoś w banku albo kasie oszczędności złoży gotówkę na t. zw. rachunek czekowy (konto czekowe), wówczas otrzymuje książeczkę czekową, zawierającą poszczególne blankiety, zwane czekami kasowymi. Właściciel takiej książeczki może np. kupując towar, wręczyć kupcowi czek zamiast gotówki.

Aby czek był ważny musi zawierać:

- 1) miejsce i datę wystawienia czeku,
- 2) nazwę banku lub kasy oszczędności, która ma wypłacić podaną kwotę,
- 3) wydrukowane słowo „czek“ na blankiecie,
- 4) polecenie wypłacenia oznaczonej kwoty pieniężnej, którą wyszczególnia się cyframi, a nadto słowami,
- 5) podpis właściciela książeczki czekowej.

Niżej podajemy wzór ważnie wystawionego czeku:

N^o 0591401 A.

zł 100 gr

Bank Polski Oddział

we Lwowie

wyplaci okazicielowi niniejszego czeku z $\frac{\text{m\acute{e}go}}{\text{naszego}}$ rachunku żyrowegozłotych sto

We Lwowie, dnia 1 sierpnia 1933.

Adam Górowski

B A N K P O L S K I

Ten, który otrzymał czek, udaje się z nim do banku i otrzymuje wyszczególnioną na czeku kwotę pieniężną. Czek jest zatem bezgotówkowym środkiem zapłaty.

Można również posiadać konto w banku, czy też w kasie oszczędności, oparte na kredycie. Np.: fabrykant, posiadający zabudowania, maszyny, może uzyskać w banku kredyt do pewnej wysokości (np. do 10 000 zł), to znaczy, że może rozporządzać tą kwotą tak, jakby złożył gotówkę. Bank zabezpiecza sobie tę kwotę na majątku fabrykanta. Zapomocą czeków można również nie tylko zlecić wypłatę pewnej gotówki, ale także przekazać (przełać) pewną kwotę z konta jednego właściciela na konto drugiego.

Zadania

1. Wystaw czek z datą 8/III 1934 do Banku Dyskontowego w Warszawie z poleceniem wypłaty 600 zł p. Aleksandrowi Malinowskiemu!
2. Kupiec złożył do banku na rachunek czekowy 5000 zł. Zamawiając w różnych fabrykach potrzebne mu towary, płacił czekami zamiast gotówką i tak 1/II wystawił czek na 640 zł, 4/II na 250 zł, 10/II na 330 zł, 17/II na 150 zł, 22/II na 720 zł, 27/II na 90 zł; jaką kwotę posiada w dniu 1/III (saldo)?
3. Przemysłowiec posiadał konto czekowe, na które składał swe dochody i za pośrednictwem którego uskuteczniał wydatki. Rachunek jego konta przedstawiał się w sposób następujący:

Wpłynęło

Data	Kwota	
	zł	gr
1/II	1600	—
10/II	550	—
20/II	420	—
1/III	840	—
10/III	920	—
20/III	280	—

Wypłacono

Data	Numer czeku	Kwota	
		zł	gr
3/II	26845	65	30
7/II	26846	190	50
11/II	26847	240	—
18/II	26848	85	20
25/II	26849	450	—
5/III	26850	620	50
12/III	26851	115	80
20/III	26852	320	40
28/III	26853	556	20

Oblicz saldo w dniu 1/IV!

4. Firma „Przemysł Drzewny“ złożyła w dniu 2 stycznia 1933 r. na konto czekowe kwotę 30 000 zł. Z powyższej kwoty wypłacono I/IV 1933 r. 5 000 zł, a 1/VI 1933 r. — 4000 zł. Jaką kwotę posiada firma z końcem czerwca 1933 r. na rachunku czekowym, jeśli bank płaci 5% rocznie? (Dodaj do 30 000 zł procenta za 3 miesiące, odejmij 5000 zł, do otrzymanej kwoty dodaj procenta za 2 miesiące, odejmij 4000 zł, a wreszcie dodaj procenta za 1 miesiąc).

Blankiety nadawcze P. K. O.

Jeżeli jakaś osoba lub firma posiada rozgałęzione stosunki handlowe lub finansowe, zwłaszcza w różnych miejscowościach, wówczas zakłada swoje konta w P. K. O. Właściciel konta otrzymuje blankiety zwane nadawczymi, zaopatrzone numerem konta, a następnie rozsyła je osobom, od których ma otrzymać pieniądze. Osoba, która ma zapłacić, wypełnia blankiet nadawczy, poczem wpłaca wymienioną kwotę w Urzędzie Pocztowym. Blankiety nadawcze zastępują więc przekazy pieniężne pocztowe, a mają tę dogodność, że nie są połączone z kosztami przesyłki. Blankiety nadawcze składają się z trzech części: *a)* potwierdzenia dla wpłacającego (tę część zatrzymuje nadawca), *b)* dowodu wpłaty (otrzymuje adresat), *c)* dowodu wpisu (zatrzymuje Urząd Pocztowy lub Oddział P. K. O.).

Obok podajemy wzór wypełnionego blankietu nadawczego:



Potwierdzenie
dla wpłacającego.

Dnia 10 stycznia 1934

przyjęto wpłatę

złotych Trzydzięci

na konto czekowe w Pocztovej
Kasie Oszczędności w Warszawie **Nr. 500.800**

właściciel konta:
KSIAŻNICA-ATLAS
Zjednoczone Zakłady Kartograficzne
i Wydawnicze T. N. W. Sp. Akc.
Lwów

Stempel
dzienny
pocztowy

Podpis urzędnika
pocztowego:

Y Z C A W A D A N I E T K I E N I A B L A N K I E T

na „Świat i Życie“

Dowód wpłaty.

Wpłatę zł. 30 gr. —

oskutezni(a) Władysław

Szczerbiński

w Poznaniu

ulica, numer domu Wysoka 42, II p.

na konto **Nr. 500.800**

dnia 10 stycznia 19 34

500 W

Stempel
dzienny
pocztowy

Dowód wpisu.

Wpłatę zł. 30 gr. —

słownie złotych

Trzydzięci

oskutezni(a) Władysław

Szczerbiński

w Poznaniu

Wysoka 42, II p.

na konto **Nr. 500.800**

dnia 10 stycznia 19 34

500 W

Stempel
dzienny
pocztowy

Urzędnik pocztowy winien dowód wpłaty wraz z dowodem wpisu
odłączyć i przesłać z wykazem dziennym do P. K. O. w Warszawie.

1. Kup w Urzędzie Pocztowym blankiet nadawczy i wypełnij go na kwotę 20 zł, którą chcesz przesłać panu M. N., będącemu właścicielem konta Nr. 345 600.
2. Kupiec na prowincji spłacał pożyczkę przysyłając blankietem nadawczym P. K. O. przez cały rok co miesiąc 150 zł; ile zapłaciłby za przesyłkę zapomocą przekazów pieniężnych?

Zobowiązania pieniężne

Jeżeli ktoś chce pożyczyć w banku, względnie w Kasie Oszczędności pewną kwotę pieniędzy, wówczas składa zazwyczaj pisemne zapewnienie, że kwotę powyższą zwróci w oznaczonym czasie. Zapewnienie takie, wystawione na specjalnym urzędowym blankiecie, nazywamy weksem. Jeżeli pożyczający (dłużnik) nie zwróci w oznaczonym czasie pożyczonych pieniędzy (t. j. nie wykupi weksła), wówczas wypożyczający (wierzyciel) może dłużnika zaskarżyć. Na skutek takiej skargi sąd w krótkim czasie zarządza przymusowe ściągnięcie należnej kwoty.

Obok podajemy wzór weksła.

Aby weksel był ważny musi zawierać:

- a) miejsce i datę wystawienia,
- b) datę terminu wykupienia weksła,
- c) słowo „weksel“ wydrukowane na blankiecie,
- d) kwotę do zapłacenia wypisaną cyframi i słowami,
- e) osobę, albo kasę (bank), której kwota ma być zapłacona,
- f) własnoręczny podpis.

Cena blankietu zależy od kwoty, na którą weksel ma być wystawiony.

W handlu i przemyśle używa się weksli nie tylko przy pożyczaniu pieniędzy, ale także przy płaceniu za towar. Jeżeli kupiec pobrał w fabryce towar, którego nie płaci gotówką, wówczas wystawia weksel na odpowiednią sumę. W ten sposób kupiec zyskuje czas do zebrania przez rozsprzedaż towaru potrzebnej gotówki.

Oprócz pożyczek na weksel, które są zazwyczaj krótkoterminowe (to znaczy muszą być zwrócone w kilku miesiącach), istnieją pożyczki długoterminowe (zwrotne w ciągu kilkunastu albo nawet kilkudziesięciu lat), noszące nazwę hipotecznych. Pożyczkę hipoteczną można uzyskać o ile posiada się ziemię, dom i t. p. Majątek dłużnika służy jako zabezpieczenie pożyczonej kwoty i nie może być sprzedany przed zaplaceniem długu bez zgody wierzyciela.

Zadania

1. Wypełnij weksel z datą dzisiejszą na kwotę 200 zł płatną w Banku Gosp. Kraj. w trzy miesiące od daty wystawienia!
2. Ktoś pożyczył na weksel: a) 600 zł, b) 800 zł, c) 1100 zł na: a) 9%, b) 9½%, c) 10%. Kasa przy wypłacie gotówki potrąciła procent za 3 miesiące; ile gotówki otrzymał?
2. Weksel na 500 zł jest płatny za trzy miesiące. W chwili obecnej wart jest jednak mniej o pewien procent, zwany dyskontem.

Urzędowy blankiet wekslowy
Cena wraz z dodatkiem 10% - owym 66 gr. Dla weksli, których suma nie przewyższa 200 zł.

	Opłata stemplowa 60 gr
60 groszy	

Lwów , dnia 1 sierpnia 1933 r. Na 200 zł

Dnia 30 września 1933 zapłacić za ten sola

weksel na zlecenie Adama Górowskiego w Krakowie sumę

złotych dwieście

Jan Biesiadzki

Płatny we Lwowie

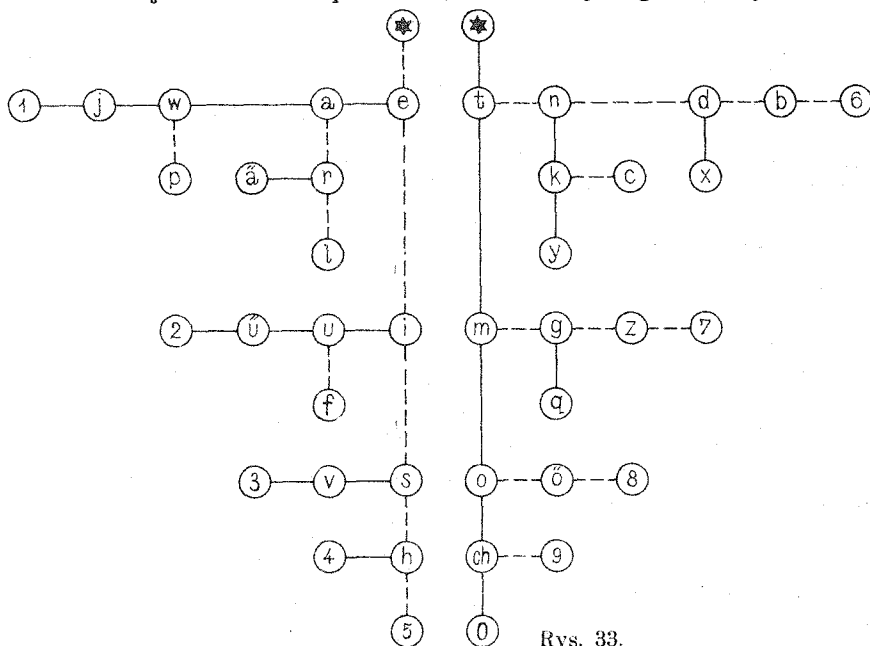
Oblicz wartość tego weksla w chwili obecnej, jeżeli dyskonto wynosi 12% t. j. oblicz, jaki kapitał oddany na 12% da po 3 miesiącach 500 zł!

4. Oblicz wartość weksli w dniu 1 kwietnia przy dyskoncie 9% na kwotę: a) 600 zł płatnych 1 lipca, b) 850 zł płatnych 15 lipca, c) 1500 zł płatnych 20 lipca!
5. Kupiec zakupił towar za 5000 zł, przyczem część zapłacił gotówką, a nadto wystawił weksle: jeden na 1500 zł, płatny za 3 miesiące, i drugi na 2000 zł, płatny za 5 miesięcy; ile zapłacił gotówką, jeżeli dyskonto wynosiło 10% (oblicz wartość każdego weksla w chwili wystawienia)!
6. Kwota: a) 800 zł, b) 1200 zł, c) 2000 zł, pożyczona na weksel na: a) 9½%, b) 9%, c) 10 %, ma być spłacona w ratach, płatnych co trzy miesiące, przyczem za każdym razem dłużnik spłaca: a) czwartą, b) ósmą, c) dziesiątą część pożyczonego kapitału; ile wynosi każda rata?

Licz: pierwsza rata w zadaniu a) wynosi 200 zł i 9½% od 600 zł za 3 miesiące.

Dodatek

1. Na rys. 33 podany jest alfabet Morsego. Punktem wyjścia jest zawsze jeden z dwu punktów, oznaczonych gwiazdką. Odcinek



Rys. 33.

8.

1	$1 + b + c + d$	$1 + a + b$	$1 + a + c + d$
$1 + a + b + c$	$1 + a + d$	$1 + c$	$1 + b + d$
$1 + c + d$	$1 + b$	$1 + a + b + c + d$	$1 + a$
$1 + a + b + d$	$1 + a + c$	$1 + d$	$1 + b + c$

Podstaw w miejsce liter a, b, c, d, dowolne liczby całkowite, a otrzymasz t. zw. kwadrat magiczny, w którym suma liczb każdej kolumny, wiersza lub przekątnej będzie ta sama. Przyjmij np. $a = 1$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 8$.

9. Ziemia opasana jest sznurem wzdłuż równika i podobnie pomarańcza. Przedłużamy każdy z tych sznurów o 1 m i odpowiednio formujemy z nich koła współśrodkowe do kół równikowych. Które z tych kół bardziej odstaje, czy koło opasujące pomarańczę, czy też opasujące ziemię?
10. Są 3 naczynia o pojemności 8 l, 5 l i 3 l; naczynie największe jest pełne wody. W jaki sposób można, posługując się tylko temi trzema naczyniami, przelać wodę tak, aby w dwóch naczyniach było po 4 l wody?
11. Na papierze kratkowanym zaznacz 4 wierzchołki kwadratu. Na przemian z kolegą łącz odcinkami sąsiednie punkty kratki. Jest to tak zwana gra „w szewca”. Niech grę zaczyna twój kolega. Ty za każdym razem rysuj odcinek symetrycznie położony ze względu na środek kwadratu. Jeśli kwadrat ma nieparzystą liczbę krątek, to tym sposobem grę wygrasz, jeśli zaś liczba krątek jest parzysta, to uzyskasz remis.

Odpowiedzi.

3. 179.

4. Więcej niż 12 sekund, bo przy 6 uderzeniach jest 5 przerw, a przy 12 uderzeniach 11 przerw.

5. $7 = 2^2 + 2 + \frac{1}{2}$, $23 = 22 + \frac{1}{2}$, $28 = 2 + 2 + 2 + 22$.

6. $100 = 99 + \frac{1}{9} = 99 + \frac{99}{9} = 111 - 11 = 3.33 + \frac{1}{3} = 5.5.5 - 5.5$, albo $(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$.

7. Każda (± 0).

9. Oba koła jednakowo odstają, gdyż w obu wypadkach promień wzrósł o $\frac{1}{2\pi}$ m.

10. Z początku największe naczynie było pełne wody, średnie i najmniejsze puste, co zapisujemy: 8, 0, 0. Następnie przelano z największego naczynia do średniego 5 l wody, co zapisujemy: 3, 5, 0. W jaki sposób dalej należy wodę przelewać podają następujące trójki liczb: 3, 2, 3; 6, 2, 0; 6, 0, 2; 1, 5, 2; 1, 4, 3; 4, 4, 0 albo 8, 0, 0; 5, 0, 3; 5, 3, 0; 2, 3, 3; 2, 5, 1; 7, 0, 1; 7, 1, 0; 4, 1, 3; 4, 4, 0.
-

Spis treści

Potęgowanie

	Str.
Określenia	3
Zadania	3
Iloczyn potęg	4
Zadania	5

Liczby pierwsze

Określenia	5
Zadania	6
Rozkład liczby na czynniki pierwsze	7
Zadania	7
Podzielniki liczby	8
Zadania	8
Wspólny podzielnik	9
Wyznaczenie NWP zapomocą rozkładu na czynniki pierwsze	9
Zadania	9
Najmniejsza wspólna wielokrotność	10
Zadania	10

Działania liczbami ułamkowymi i dziesiętnymi

Ułamki i liczby dziesiętne	12
Dodawanie	14
Zadania	14
Ćwiczenia	16
Odejmowanie	17
Zadania	17
Zmiany sumy i różnicy	18
Zmiany sumy	18
Zmiany różnicy	19
Zadania	20
Ćwiczenia	21
Mnożenie	22
Zadania	22
Ćwiczenia	25
Dzielenie	31
Zadania	31

Zmiany iloczynu i ilorazu	34
Zadania	35
Ćwiczenia	36
Obliczanie wyrażeń	40
Porządek wykonywania działań	40
Zadania	40—42
Nawiasy	43
Obliczanie wartości wyrażeń, zawartych w nawiasach	43
Zadania	44
Używanie nawiasów	45
Zadania	46
Plan zadania	48
Zadania	48

Znakowanie literowe

Określenia	50
Zadania	51
Wartości liczbowe wyrażeń	53
Zadania	54
Mieszanki	58

Wielkości proporcjonalne

Stosunek dwóch wielkości	59
Zadania	60
Podział w danym stosunku	61
Zadania	62
Tabele i przedstawienia graficzne	64
Zadania	66
Wielkości wprost proporcjonalne	66
Określenia	66
Zadania	69
Reguła trzech prosta (dla wielkości wprost proporcjonalnych)	71
Zadania	72
Wielkości odwrotnie proporcjonalne	76
Określenia	76
Zadania	79
Reguła trzech prosta (dla wielkości odwrotnie proporcjonalnych)	80
Zadania	80
Wielkości zależne od kilku innych	84
Zadania	86

Procenty

Określenia	87
Zadania	88
Obliczanie liczby, której procent jest znany	93

Zadania	94
Obliczanie procentu	95
Zadania	95
Procenty proste	98
Obliczanie dochodu	98
Zadania	100
Obliczanie kapitału	101
Zadania	102
Czas oprocentowania	102
Zadania	103
Stopa procentowa	104
Zadania	104
Rabat, brutto, skonto, prowizja	105
Zadania	105
Stopy	107
Określenie	107
Zadania	107

Wiadomości o oszczędnościach i kredycie.

P. K. O.

Rachunek monet	109
Zadania	110
Instytucje finansowe	111
Zadania	112
Bezgotówkowe środki zapłaty	113
Konta	113
Zadania	115
Blankiety nadawcze P. K. O.	116
Zobowiązania pieniężne	118
Zadania	118
Dodatek	120
Odpowiedzi	122